



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Processo de Bastões de alcance finito. Aspectos dos modelos microscópico e macroscópico.

Aniel Ojeda Alvarez

Orientador: **Leandro Pinto Rodrigues Pimentel**

Tese de Doutorado apresentada como parte dos requisitos
para obtenção do título de *Doutor em Estatística*

Rio de Janeiro,
outubro de 2015

O39p

Ojeda Alvarez, Aniel

Processo de Bastões de alcance finito. Aspectos dos modelos microscópico e macroscópico./ Aniel Ojeda Alvarez. – 2015

92f. ; 30 cm

Orientador: Leandro Pinto Rodrigues Pimentel

Tese (doutorado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Estatística, 2015.
Referências: f.87-88.

1. Processo de bastões 2. Limite hidrodinâmico
I. Pimentel, Leandro Pinto Rodrigues II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática
III. Título.

Processo de Bastões de alcance finito. Aspectos dos modelos microscópico e macroscópico.

Aniel Ojeda Alvarez

Orientador: Leandro Pinto Rodrigues Pimentel

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada por:

Leandro Pinto Rodrigues Pimentel – IM/UFRJ (Presidente)

Maria Eulália Vares – IM/UFRJ

Glauco Valle da Silva Coelho – IM/UFRJ

Wladimir Augusto das Neves – IM/UFRJ

Roberto Imbuzeiro Moraes Felinto de Oliveira – IMPA

Rio de Janeiro, 23 de outubro de 2015

Resumo

O Processo de Bastões pode ser definido de modo geral como uma família de variáveis não negativas indexadas geralmente por \mathbb{Z} ou \mathbb{Z}^d . Ao evoluir o tempo, pedaços dos bastões podem ser quebrados e adicionado a um outro deles. Neste trabalho foi introduzida uma versão do Processo de Bastões unidimensional. Isto é, dada uma família de variáveis não negativas em $(\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, em cada sitio i , depois de um tempo exponencial com taxa η_i o bastão é quebrado uniformemente no intervalo $[0, \eta_i]$ e dito pedaço é adicionado para algum dos vizinhos no intervalo $[i - R, i + R]$ que é escolhido aleatoriamente com probabilidade $p(\cdot)$. Para mostrar que o dito processo é bem definido foi feita uma aproximação de \mathbb{Z} por compactos $[-M, M]$ fazendo $M \rightarrow \infty$. O nosso processo possui a propriedade de atratividade e, além disso, sob a lei produto exponenciais i.i.d. nosso processo é invariante. Como resultado principal foi obtido o limite hidrodinâmico para dois casos, primeiro quando $p(\cdot)$ tem média zero e segundo, quando tem média não nula. Em ambos casos foi usado um enfoque martingal para o estudo da forma do limite. No caso com média zero o perfil empírico converge para a solução fraca da equação do meio poroso. A diferencia dos modelos simétricos estudados na literatura, o nosso foi estudado no domínio não limitado \mathbb{R} . Para o caso com média não nula vamos chegar na solução fraca entrópica da equação de Burgers não viscosa. Este caso foi estudado por separado utilizando a metodologia de soluções em valor de medidas de Young.

Palavras chaves: Processo de Bastões, limite hidrodinâmico, equação do meio poroso, leis de conservação não linear, soluções em valor da medidas de Young.

Abstract

The stick process in general is defined as a non-negative random variable family on \mathbb{Z} or \mathbb{Z}^d lattice. In time evolution, pieces of sticks can be broken and added on to other site. In this work we introduced a version of one-dimensional stick process. Given a non-negative random variable family $(\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, in each site i , in exponential time with rate η_i is broken a piece uniformly in $[0, \eta_i]$ and added on to some randomly choice neighbor in $[i - R, i + R]$ with probability $p(\cdot)$. To verify if this process is well defined was made an approximation of \mathbb{Z} by compact sets $[-M, M]$ as $M \rightarrow \infty$. The process have attractiveness property and product exponential measure is invariant under the process dynamic. The main result was the hydrodynamical scaling limit, in both, with $p(\cdot)$ zero mean and non-zero mean case; using a martingale approach. In zero mean case the empirical profile converge to a weak solution of porous medium equation. In contrast with literature symmetric models, us model is development in non-bounded domain \mathbb{R} . In non-zero mean case the limit was a weak entropic solution of inviscid Burgers equation. This case was studied separately using the measures valued solution approach.

Keywords: Stick process, hydrodynamic scaling limit, porous medium equation, non-linear conservation law, measured valued solutions.

Lista de Figuras

1.1	Processo de Bastões.	6
1.2	Interpretação dos pontos em \mathcal{P}^i associados ao bastão η_i	7
1.3	Evolução do Processo de Hammersley Generalizado.	13
1.4	Deslocamento das partículas sob acoplamento básico.	16
1.5	Trajetórias dos processos sob acoplamento básico.	16
1.6	Caminho crescente de 6 pontos até o tempo t	19

Sumário

List of Figures	viii
Contents	xi
Introdução	1
1 O processo de Bastões	5
1.1 O processo	5
1.1.1 Construção gráfica do processo truncado	6
1.1.2 O espaço de estados	10
1.2 O processo de Hammersley	11
1.2.1 Limitação uniforme dos momentos	14
1.3 Compacidade relativa	20
1.4 Algumas propriedades	24
1.4.1 Distribuição invariante	25
2 Limite Hidrodinâmico	29
2.1 Preliminares	30
2.1.1 Solução fraca	32
2.2 Limite hidrodinâmico	34
2.3 Prova do Teorema 2.1	35
2.3.1 Estimação do martingal	37
2.3.2 Compacidade relativa de $(\alpha^N)_{n \in \mathbb{N}}$	38
2.3.3 Equilíbrio local	41
2.3.4 Prova do Lema de Substituição (Lema 2.4)	43
2.3.4.1 Estimativas de um e dois blocos	45
2.3.5 Distribuição dos Pontos limites	54
2.3.6 Unicidade	58
2.3.7 Extensão ao caso $u_0 \geq 0$	59
2.3.7.1 Gerador para o acoplamento básico	59
3 Caso de média não nula	65
3.1 Leis de conservação	66

3.2	Soluções em valores de medidas de Young para Leis de Conservação	67
3.2.1	Medidas de Young	68
3.2.1.1	Compacidade relativa de $\alpha_t^{N,L}$	69
3.3	Distribuição dos pontos limites	70
3.3.1	Desigualdades de entropia no nível microscópico	71
3.3.2	Unicidade dos pontos limites	78
3.4	Extensão ao caso geral	82
	Referências Bibliográficas	87
	Topologia do espaço de estados	89

Introdução

O Processo de Bastões pode ser definido de modo geral como uma família de variáveis não negativas (interpretadas como bastões) indexadas geralmente por \mathbb{Z} ou \mathbb{Z}^d . Ao evoluir o tempo, é quebrado um pedaço de algum bastão e o dito pedaço é adicionado a um outro deles. Este processo tem sido estudado em diversas variantes. Por exemplo: Suzuki and Uchiyama (1993) e Ekhaus and Seppäläinen (1996) usam versões simétricas para o estudo do modelo microscópico para a equação do meio poroso. Outra versão totalmente assimétrica foi introduzida por Seppäläinen (1996) na grade unidimensional inteira como uma forma à solução do problema de Ulam (comprimento da maior subsequência crescente de uma permutação aleatória) estudado anteriormente por Hammersley (1972) e Aldous and Diaconis (1995) onde é introduzido o Processo de Hammersley com dito nome.

Seppäläinen (1996) mostra que o Processo de Bastões totalmente assimétrico é bem definido em um espaço de estado infinito, por meio da sua equivalência com o Processo de Hammersley. Ele aproveita a relação variacional entre o Processo de Hammersley e o modelo de Percolação de Última Passagem para obter estimativas que permitem provar a boa evolução deste sistema em volume infinito. Também usa a mesma relação para mostrar a convergência, de uma forma muito geral, para a solução fraca da equação de Burgers não viscosa. O processo de Seppäläinen (1996) só tem alcance para seu vizinho mais próximo na direita enquanto os processos de Ekhaus and Seppäläinen (1996), Suzuki and Uchiyama (1993) tem alcance para qualquer sitio, mas estão definidos em espaços compactos (por exemplo, o toro).

Neste trabalho é introduzida uma versão mais geral do Processo de Bastões unidimensional que inclui os casos simétrico e assimétrico, além de ter um alcance para vizinhos a distancia não maior que um $R > 0$ dado. Para isso são exploradas as estimativas de Seppäläinen (1996) para poder mostrar que nosso Processo de Bastões também é bem definido em volume infinito. Usando a mesma relação entre o Processo de Hammersley e o Processo de Bastões totalmente assimétrico, usada por Seppäläinen (1996), nos permitiu definir uma generalização para o Processo de Hammerley.

Além da construção do processo de bastões estudamos os limites hidrodinâmicos, que vão ser obtidos para os dois casos dependendo da simetria do processo. Nos trabalhos de Ekhaus and Seppäläinen (1996), Suzuki and Uchiyama (1993) é estudado o modelo simétrico do processo de bastões no toro multidimensional. Ditos resultados são baseados no método de estimados da entropia desenvolvido por Guo et al. (1988). Como parte do modelo simétrico, fazemos uma generalização para o espaço unidimensional de volume infinito, como foi definido nosso processo. Para o caso assímetro, seguimos a ideia de Rezakhanlou (1991) que utiliza os resultados de soluções definidas no espaço das medidas de DiPerna (1985). Para desenvolver ambos enfoques são aproveitadas as propriedades mostradas na primeira parte (atratividade e medida invariante produto). Devido a que bastões inicialmente nulos não podem ser absolutamente contínuos com respeito a nossa medida invariante produto, primeiramente foi preciso supor, que a condição inicial seja estritamente positiva. Esta hipóteses é retirada no final de cada modelo usando aproximação.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro é definido o processo mediante aproximação por uma sequencia de processos com evolução bem definida. Um acoplamento com o caso totalmente assimétrico de Seppäläinen (1996) permite ter estimativas que ajudam na prova da rigidez da dita sequência. Uma vez que nosso processo é definido como o único limite desta sequencia, são provadas a atratividade e que a invariância da medida induzida por produto de exponenciais i.i.d.

No segundo capítulo é desenvolvida a teoria para encontrar e provar a convergência

ao limite hidrodinâmico para nosso modelo. Primeiro é deduzida a forma do possível limite hidrodinâmico e estabelecidas as hipóteses e condições para a prova. Utilizando continuidade absoluta da distribuição inicial com respeito a medida invariante produto, é mostrada a estimativa de um bloco e dois blocos utilizando ideias similares às usadas por Ekhaus and Seppäläinen (1996) mas sem usar diretamente os estimadores da entropia relativa. Neste passo é utilizada a suposição de condição inicial estritamente positiva que vai ser retirada no final por aproximação. Seguidamente é feita a prova para o espaço de volume infinito, que generaliza a prova feita por Ekhaus and Seppäläinen (1996) para o toro, da continuidade absoluta com respeito a Lebesgue dos pontos limites. Neste capítulo é concluída a prova do caso simétrico utilizando os resultados de unicidade para a equação do meio poroso. Por outro lado, o caso assimétrico resulta na equação de Burgers que é conhecida a não unicidade, de forma geral, da solução.

No terceiro capítulo é desenvolvida a teoria para o caso assimétrico. Utilizando os resultados já obtidos no capítulo segundo, só falta estudar a unicidade dos pontos limites. Com tal fim, é mostrado que os pontos limites são soluções entrópicas no sentido (3.2). A teoria de DiPerna (1985) de soluções no espaço das medidas para as leis de conservação, nos permite a partir da condição de entropia (para medidas (3.4)), deduzir diretamente que a medida solução obtida está concentrada na solução fraca entrópica no sentido (3.2). Por este motivo o terceiro capítulo é desenvolvido baseado na teoria de DiPerna (1985). Os resultados fundamentais deste capítulo são a prova da condição de entropia e as demais condições do resultado de DiPerna (1985), que garantem o fato de que a solução no espaço das medidas converge em L^1 à medida de Dirac concentrada no dado inicial, quando $t \rightarrow 0$.

Capítulo 1

O processo de Bastões

O Processo de Bastões totalmente assimétrico foi introduzido por Seppäläinen (1996) relacionando-o ao Problema de Ulam de encontrar a maior sequência crescente de uma permutação aleatória. Também foi apresentado o Processo de Bastões totalmente assimétrico como uma alternativa ao Processo de Hammersley. Neste trabalho é construída uma generalização do Processo de Bastões onde acontecem saltos dentro uma vizinhança de comprimento $2R + 1$ onde o sítio é escolhido por uma medida de probabilidade discreta de alcance finito $p(\cdot)$. Por meio desta construção, também é obtida uma generalização do Processo de Hammersley.

1.1 O processo

Para definir nosso processo consideramos uma grade inteira unidimensional, ou seja, tomamos $i \in \mathbb{Z}$ e para cada sítio i definimos uma variável não negativa $\eta_i \in [0, \infty)$ as quais são chamadas bastões. Dada $p(\cdot)$ uma distribuição de probabilidade sobre $\{-R, -R + 1, \dots, R\}$, a evolução no tempo para esta configuração vai estar definida pela seguinte lei:

- (E1) em cada sítio i , com tempo exponencial de taxa η_i , tomamos um valor U_i uniformemente distribuído no intervalo $[0, \eta_i]$;
- (E2) o bastão η_i vai ser reduzido para $\eta_i - U_i$ e é adicionado o pedaço de tamanho U_i restante ao bastão η_{i+j} , com probabilidade $p(j)$.

Em outras palavras, o alcance de cada salto vai ser dentro de um raio finito R . Com esta informação precisamos mostrar, que de fato, existe um Processo de Markov que segue a lei de evolução (E1)-(E2).

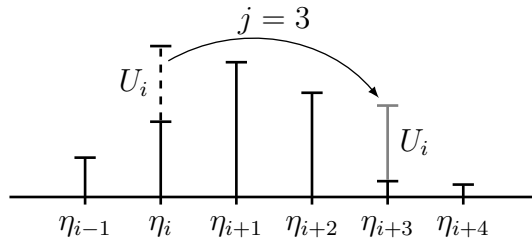
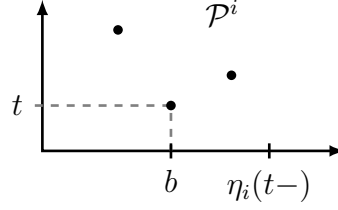


FIGURA 1.1: Processo de Bastões.

1.1.1 Construção gráfica do processo truncado

Para a construção de nosso processo, vamos fixar um inteiro $M > 0$ e consideramos o processo com a mesma evolução mas definido nos sítios $-M, -M + 1, \dots, M$. Para cada $i \in \{-M, \dots, M\}$ sejam \mathcal{P}^i Processos Pontuais de Poisson independentes com intensidade $leb \times leb$ sobre $(0, \infty) \times [0, \infty)$ e \mathcal{J} uma sequência de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuída com distribuição de probabilidade $p(\cdot)$. Assumimos também que \mathcal{J} é independentes da família de Processos de Poisson (\mathcal{P}^i). Dado um ponto $(t, b) \in \mathcal{P}^i$, para algum i , a primeira coordenada t é interpretada como o tempo de ocorrência de uma ruptura do bastão η_i e b o valor onde ele vai ser quebrado caso $\eta_i(t-)$ seja maior do que b (ver Figura 1.2). Onde $\eta_i(t-)$ é o valor de $\eta_i(t)$ se não tivesse o ponto (t, b) , Ou seja, coincide com o limite pela esquerda ($s < t$), quando $s \rightarrow t$, de $\eta_i(s)$.

Observação. Veja na Figura 1.2 que o ponto (t, b) vai aparecer de forma que b é uniformemente distribuído no intervalo $[0, \eta_i(t-)]$, num tempo exponencial de parâmetro $\eta_i(t-)$. O que é equivalente à evolução (E1).

FIGURA 1.2: Interpretação dos pontos em \mathcal{P}^i associados ao bastão η_i .

Desta forma, se adicionamos uma configuração inicial $\eta = (\eta_i)$ a uma realização da família de processos, $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^i)_{i=-M}^M$ e uma realização da sequência \mathcal{J} , a evolução do processo truncado pode ser escrita como função desta tripla. Denotamos dita relação pela função $\Theta(\eta, \mathcal{P}, \mathcal{J})$, onde a evolução é definida como explicamos a seguir.

Seja τ_1 o mínimo das t tais que $(t, b) \in \mathcal{P}^{i_1}$ para algum $i_1 \in \{-M, \dots, M\}$ e $b \leq \eta_{i_1}$. (Podemos assumir que não existe coincidência entre os valores de t ou b nas trajetórias de \mathcal{P} , pois coincidências acontecem com probabilidade nula.) Deste modo, $\eta_{i_1}(s) = \eta_{i_1}(0)$, para cada $s < \tau_1$. No instante τ_1 , $\eta_{i_1}(\tau_1) = \eta_{i_1}(\tau_1-) \wedge b_1$, onde b_1 é tal que $(\tau_1, b_1) \in \mathcal{P}^{i_1}$. Tomamos j_1 o primeiro elemento da sequência \mathcal{J} , se $|i_1 + j_1| \leq M$, temos $\eta_{i_1+j_1}(\tau_1) = \eta_{i_1+j_1}(\tau_1-) + (\eta_{i_1}(\tau_1-) - b_1)^+$, onde $(\cdot)^+ = \max\{0, \cdot\}$. Os demais sítios, $\eta_k(\tau_1) = \eta_k(\tau_1-)$ para $k \neq i_1, i_1 + j_1$.

Analogamente, podemos encontrar sequências $(\tau_n)_{n \geq 1}$ e $(i_n)_{n \geq 1}$ aleatórias, definida recursivamente como, τ_1 e i_1 dado acima, e para $n \geq 2$,

$$\tau_n = \min \{t > \tau_{n-1} : (t, b) \in \mathcal{P}^{i_n}, \text{ para algum } i_n \in \{-M, \dots, M\} \text{ e } b \leq \eta_{i_n}\},$$

deste modo, o processo vai permanecer invariante para $t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ e em cada valor τ_n vai tomar o valor,

$$\eta_k(\tau_n) = \begin{cases} \eta_{i_n}(\tau_n-) \wedge b_n, & \text{se } k = i_n, \\ \eta_{i_n+j_n}(\tau_n-) + (\eta_{i_n}(\tau_n-) - b_n)^+, & \text{se } k = i_n + j_n \text{ e } |k| \leq M, \\ \eta_k(\tau_n-), & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (1.1)$$

onde i_n e b_n são tais que $(\tau_n, b_n) \in \mathcal{P}^{i_n}$ e j_n o n -ésimo elemento da sequência \mathcal{J} .

Deste modo é definida uma sequência de processos $\eta^M(t)$ a valores no espaço de estados $Y^M = [0, \infty)^{\{-M, \dots, M\}}$ que vai ser munido pela métrica produto,

$$d(\eta, \xi) = \sum_{i=-M}^M |\eta_i - \xi_i|.$$

Denotemos por P^{η^M} a distribuição de $\eta^M(\cdot)$ em $D([0, \infty), Y^M)$, o espaço das trajetórias contínuas à direita e com limite à esquerda definidas sobre $[0, \infty)$ a valores em Y^M (ver detalhes Billingsley (1999)). Pelas propriedades de invariância sob translações da distribuição dos (\mathcal{P}^i) , para cada M , a família de medidas de probabilidades $\{P^{\eta^M}, \eta^M \in Y^M\}$ define um Processo de Feller em $D([0, \infty), Y^M)$ na notação de Liggett (2005). Isto é, seja o semigrupo definido por

$$S(t)f(\eta) = E^\eta f(\eta(t)), \quad (1.2)$$

para cada f contínua e limitada sobre Y^M . O processo de Markov $\{P^{\eta^M}, \eta^M \in Y^M\}$ é dito de *Feller* se $S(t)f$ é contínua e limitada para cada $t \geq 0$ e f contínua e limitada.

Em geral, dado X um espaço métrico (assumimos também que X é completo e separável) e $C_b(X)$ o conjunto das funções contínuas e limitadas sobre X . Dado um Processo de Feller em $D([0, \infty), X)$, lhe podemos associar o *Semigrupo de Markov* $\{S(t), t \geq 0\}$ definido em (1.2).

Dado o semigrupo de Markov $\{S(t), t \geq 0\}$, seja

$$D = \left\{ f \in C_b(X) : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)f - f}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O *Gerador Infinitesimal* do semigrupo $\{S(t), t \geq 0\}$ é o operador linear \mathcal{L} tal que para cada $f \in D$,

$$\mathcal{L}f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)f - f}{t}.$$

Proposição 1.1. Para cada M , o gerador infinitesimal associado ao processo $\{P^{\eta^M}, \eta^M \in Y^M\}$ é definido por,

$$\mathcal{L}^M f(\eta) = \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i} [f(\eta^{u,i,i+j}) - f(\eta)] du, \quad (1.3)$$

para cada f contínua e limitada. Onde, se $u \leq \eta_i$

$$\eta_k^{u,i,i+j} = \begin{cases} \eta_i - u, & k = i \\ \eta_{i+j} + u, & k = i + j \text{ e } |k| \leq M \\ \eta_k, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Demonstração. Seja f contínua e limitada

$$\begin{aligned} \frac{S_M(t)f(\eta) - f(\eta)}{t} &= \frac{Ef(\eta(t)) - Ef(\eta)}{t} = \frac{E[f(\eta(t)) - f(\eta)]}{t} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{E[f(\eta(t)) - f(\eta) | A_k] P(A_k)}{t} \\ &= E[f(\eta(t)) - f(\eta) | A_1] \cdot e^{-t\lambda_1} \lambda_1 + \frac{o(t)}{t}, \end{aligned}$$

onde A_k é o evento da ocorrência de k pontos em $(\mathcal{P}^j)_{j=-M}^M$ até o tempo t e $\lambda_1 = \sum_{i=-M}^M \eta_i$. Ou seja, a ocorrência de um ponto em $(\mathcal{P}^j)_{j=-M}^M$ até o tempo t tem distribuição poisson com intensidade $\ell eb \left[\bigcup_{i=-M}^M [0, t] \times [0, \eta_i] \right] = t \sum_{i=-M}^M \eta_i$. Além disso, a ocorrência de k pontos em $(\mathcal{P}^j)_{j=-M}^M$ tem distribuição poisson com intensidade limitada por $t(2M + 1) \sum_{i=-M}^M \eta_i$. Por outra parte,

$$\begin{aligned} E[f(\eta(t)) - f(\eta) | A_1] &= \sum_{i=-M}^M E[f(\eta(t)) - f(\eta) | B_i, A_1] P(B_i | A_1) \\ &= \sum_{i=-M}^M E[f(\eta(t)) - f(\eta) | B_i, A_1] \frac{\eta_i}{\lambda_1}, \end{aligned}$$

onde B_i é o evento que o ponto de Poisson ocorrido pertence ao processo \mathcal{P}^i correspondente ao sítio i . Mas, nesse caso, só temos a ocorrência de um salto no sítio i e a configuração

$\eta(t)$ só difere de η nos sítios i e j , este último aleatório com distribuição $p(j)$. Além disso, dada a ocorrência de um ponto de Poisson no sítio i ele vai quebrar o i -ésimo bastão num ponto uniforme em $[0, \eta_i]$, portanto, seja U uniforme em $[0, \eta_i]$,

$$E[f(\eta(t)) - f(\eta) | B_i, A_1] = \sum_{j=-R}^R p(j) E[f(\eta^{U, i, i+j}) - f(\eta)]$$

onde a configuração $\eta^{u, i, i+j}$ é definida como em (1.4).

Tomando limite quando $t \downarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{Ef(\eta(t)) - Ef(\eta)}{t} &= \lim_{t \downarrow 0} \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-R}^R p(j) \eta_i E[f(\eta^{U, i, i+j}) - f(\eta)] \cdot e^{-\lambda_1 t} \\ &= \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i} [f(\eta^{u, i, i+j}) - f(\eta)] du. \end{aligned}$$

Note que este limite existe para toda função contínua e limitada o que define o gerador infinitesimal para o dito processo. \square

1.1.2 O espaço de estados

Nosso interesse neste trabalho é definir o processo para todos os sítios em \mathbb{Z} , para isso, precisamos definir um espaço de estados apropriado. Em geral, se é permitido ter muita massa no sistema, por exemplo, os bastões crescem muito rápido quando nos afastamos da origem, pode acontecer uma acumulação infinita de massa em algum sítio durante a evolução. Esta situação não é desejável para a boa definição do processo, por isso, devemos definir o processo sobre um espaço de estados que controle o crescimento dos bastões em sítios afastados da origem.

Analogamente ao modelo desenvolvido por Seppäläinen (1996), definimos nosso espaço como

$$Y = \left\{ \eta \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i = 0 \right\}. \quad (1.5)$$

Outro elemento fundamental para o estudo da convergência é a definição de uma topologia apropriada para o espaço Y . Definiremos uma nova métrica mais forte que a métrica produto usual de forma a obter um controle uniforme sobre os bastões para sítios muito longe da origem. Além disso, teremos que Y sera um subconjunto fechado de $[0, \infty)^{\mathbb{Z}}$ (Lema .6 no apêndice).

Para $x, y \in [0, \infty)$, seja

$$\delta(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|},$$

que define uma métrica equivalente à euclidiana em \mathbb{R} . Deste modo, para $\eta, \xi \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}}$ seja

$$d(\eta, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\eta_n, \xi_n)}{2^{|n|}} + \sup_{1 \leq n} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i \right). \quad (1.6)$$

Nosso espaço de estados, sob da métrica (1.6) vai ser um espaço métrico completo separável, (Proposição .7) que são propriedades fundamentais para aplicação da teoria de convergência em Ethier and Kurtz (1986). Outras propriedades deste espaço são exploradas no apêndice 3.

Observação. Se vemos Y^M como um subconjunto de $[0, \infty)^{\mathbb{Z}}$ onde $\eta_i = 0$ para $|i| > M$, temos $Y^M \subset Y$. Além disso, toda sequência convergente em Y^M com a métrica produto também vai ser convergente em Y com a métrica (1.6).

1.2 O processo de Hammersley

Para dar uma breve explicação da evolução do Processo de Hammersley, fixamos uma configuração inicial de pontos reais não decrescentes $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ e um Processo Pontual de Poisson \mathcal{Q} sobre $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ de intensidade $leb \times leb$. Em cada instante t , tal que existe um ponto $(x, t) \in \mathcal{Q}$, a partícula mais próxima à direita de x , digamos $z_k(t-)$ vai ocupar a posição x , ou seja $z_k(t) = x$, e as partículas restantes permanecem iguais. Para uma densidade apropriada de partículas, como na condição (1.7), foi mostrado por Seppäläinen

(1996) que tal evolução está bem definida.

$$Z' = \left\{ z \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{z_n}{n^2} = 0; \quad z_i \leq z_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (1.7)$$

e analogamente

$$Y' = \left\{ \eta \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^{-1} \eta_i = 0 \right\}, \quad (1.8)$$

para o processo de bastões.

É explicada a seguir uma correspondência entre o Processo de Hammersley e o Processo de Bastões. Dado $\beta \in \mathbb{R}$ e uma configuração $\eta \in Y'$, é possível escrever $z = z^\beta(\eta)$ como

$$z_i = \begin{cases} \beta + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_j, & i > 0 \\ \beta, & i = 0 \\ \beta - \sum_{j=i}^{-1} \eta_j, & i < 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Reciprocamente, é possível definir o Processo de Bastões dada uma configuração $z \in Z'$, sendo $\eta = \eta(z)$, como

$$\eta_i = z_{i+1} - z_i. \quad (1.10)$$

O processo de bastões, estudado por Seppäläinen (1996) por meio da sua equivalência com o processo de Hammersley (1.9)–(1.10), é um caso particular do nosso com $p(1) = 1$, e portanto, $p(j) = 0$ para todo $j \neq 1$. Alguns resultados de Seppäläinen (1996) para o Processo de Hammersley, serão usados a seguir para obter algumas estimativas necessárias para nosso processo.

Se aplicamos a transformação (1.9) ao Processo de Bastões geral vamos a obter uma generalização do Processo de Hammersley. Neste caso, quando é encontrado um ponto $(x, t) \in \mathcal{Q}$, temos um intervalo da forma $(z_{k-1}(t-), z_k(t-)]$ que contém x . Neste instante, é sorteado um valor j , com probabilidade $p(-j)$, acontecendo três opções: se $-R \leq j < 0$ a partícula z_{k-1} vai pular para o sítio x e as restantes z_{k+m} , para $m = j, \dots, -2$, vão a pular uma distancia $x - z_{k-1}(t-)$ a direita. Caso que $0 < j \leq R$ analogamente $z_k(t) = x$

e z_{k+m} , para $m = 2, \dots, j$, vão a pular uma distancia $z_k(t-) - x$ a esquerda. Quando $j = 0$ não acontece nenhuma variação. Também é importante observar que dada a nossa aproximação, $z_{\pm k} = z_{\pm M}$ para $k \geq M$, os pontos $(x, t) \in \mathcal{Q}$ tais que $x < z_{-M}$ e $x > z_M$ não vão a influir na evolução do processo z^M . Pois o processo η^M não recebe massa dos sítios i tais que, $|i| > M$. Em analogia à construção gráfica em 1.1.1, escrevemos a evolução explicada acima como uma função da tripla $(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J})$, denotada por $\bar{\Theta}(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J})$.

Na Figura 1.3 é apresentado um exemplo de uma trajetória para esta generalização do Processo de Hammersley. Os pontos escuros representam os elementos de \mathcal{Q} e abaixo deles os correspondentes valores de \mathcal{J} . Por exemplo o ponto mais próximo à direita dos valores z_4, z_5 e z_6 , tem o valor 3, portanto, estas três partículas vão a ser puxadas à esquerda. Casso que tal valor seja negativo vão ser puxadas à direita as correspondentes partículas que estão à esquerda. Quando é zero nenhuma partícula é deslocada.

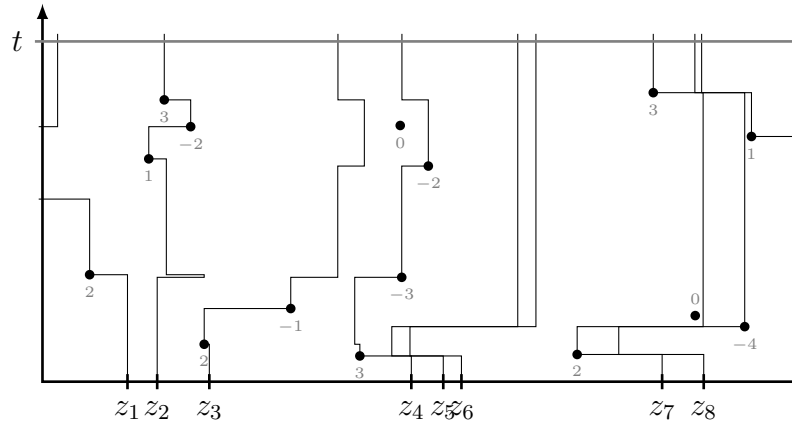


FIGURA 1.3: Evolução do Processo de Hammersley Generalizado.

Em geral, para o espaço de estados

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{z_n}{n^2} = 0; \quad z_i \leq z_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (1.11)$$

as equações (1.9)-(1.10) definem uma transformação contínua entre $D([0, \infty), Y)$ e $D([0, \infty), Z)$ de forma que as distribuições destes processos seguem as evoluções descritas acima e a seleção de β é irrelevante pela invariância sob translações do Processo de Poisson.

1.2.1 Limitação uniforme dos momentos

Agora fixamos M e consideramos nosso Processo de Bastões $(\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ em $Y^M \subset Y$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definamos um novo processo $(\phi_n)_n$, como

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^{R-1} \eta_{nR+i}(t),$$

onde R é o alcance máximo dos saltos do processo. Note que este processo vive no espaço de estados $Y^{M_R} \subset Y$, onde $M_R = \lfloor M/R \rfloor + 1$. Em geral esta transformação pode ser feita independente de M . Além disso, note que cada salto tem alcance máximo do vizinho mais próximo. Para descrever a evolução deste novo processo, olhando para o processo original, o bastão ϕ_n vai ter uma rutura no tempo

$$\tau_n = \min \{t_i : t_i \sim \exp(\eta_{nR+i}), 0 \leq i < R\},$$

ou seja, $\tau_n \sim \exp(\phi_n)$. Assim o pedaço quebrado vai passar para um dos vizinhos $n - 1, n + 1$ ou ficar no próprio sítio n , com probabilidade p^-, p^+ ou p^0 respectivamente. Estas probabilidades (cujo cálculo não é de nosso interesse) dependem de $p(\cdot)$ e da posição do bastão dentro do intervalo de tamanho R .

Analogamente como foi feito anteriormente, podemos definir \tilde{z}_i que vive no espaço de estados Z , seguindo a transformação (1.9)-(1.10). Ou seja, de forma que $\phi_n = \tilde{z}_{n+1} - \tilde{z}_n$. Assim, $\tilde{z}_n = z_{Rn}$, onde os z_n são a coleção de valores reais correspondentes aos bastões η_n pela transformação (1.9).

O processo $(\phi(t); t \geq 0)$, tem sua evolução definida por uma função $\Theta_R(\eta, \mathcal{P}, \mathcal{J})$, dada uma configuração inicial de bastões η , a família de processos de Poisson \mathcal{P} e a sequência \mathcal{J} , definidos na subsecção 1.1.1. Analogamente $(\tilde{z}(t); t \geq 0)$, tem sua evolução definida como uma função $\bar{\Theta}_R(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J})$. Note que, pela construção de ϕ a partir de η , estas funções dependem diretamente das funções Θ e $\bar{\Theta}$ anteriormente definidas. Em particular, $\bar{\Theta}_R(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J})$ pode ser vista como tomando as componentes múltiplos de R em $\bar{\Theta}(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J})$.

Lema 1.2. *Seja $\tilde{z} \in Z$. Para cada $t > 0$ e $1 \leq p < \infty$,*

$$\sup_M E^{\eta^M} \left[\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\tilde{z}_k(t)}{k^2} \right|^p \right] < \infty. \quad (1.12)$$

Demonstração. Fixemos \mathcal{Q} Processo de Poisson em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, mencionado acima e uma configuração inicial $(z_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$ para o processo (\tilde{z}_k) de forma que $z_k^0 = z_{Rk}$, sendo (z_k) é uma configuração em Z onde inicia o correspondente processo $(z(t); t \geq 0)$. Defina os Processos de Hammerleys clássicos, $z^+ = \bar{\Theta}(z^0, \mathcal{Q}, -\mathbf{1})$ e $z^- = \bar{\Theta}(z^0, \mathcal{Q}, \mathbf{1})$, onde $\mathbf{1}$ é a sequência constante 1. Note que o primeiro salta sempre à direita e o segundo à esquerda. Assim, construímos o acoplamento básico com estes três processos,

$$(\tilde{z}, z^-, z^+) = [\bar{\Theta}_R(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J}), \bar{\Theta}(z^0, \mathcal{Q}, \mathbf{1}), \bar{\Theta}(z^0, \mathcal{Q}, -\mathbf{1})].$$

Lembrando que se $\tilde{z}(t) = \bar{\Theta}_R(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J})$ e $z(t) = \bar{\Theta}(z, \mathcal{Q}, \mathcal{J})$, então, $\tilde{z}_k(t) = z_{Rk}(t)$.

Fixando M , $\eta_k = 0$ para todo $|k| > M$, deste modo $\phi_k = 0$ para $|k| > M_R$, $\tilde{z}_k = \tilde{z}_{M_R}$ para todo $k > M_R$ e $\tilde{z}_k = \tilde{z}_{-M_R}$ para todo $k < -M_R$ e $\tilde{z}_{-M_R} \leq \tilde{z}_k(t) \leq \tilde{z}_{M_R}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, a evolução de \tilde{z} só depende dos pontos de Poisson dentro da faixa $[z_{-M_R}^0, z_{M_R}^0]$. Os processos $z_k^-(t)$ e $z_k^+(t)$ não dependem de M_R pois estão definidos a partir de Processos de Hammersley clássicos.

Dada esta construção, mostraremos que, para cada M_R , $-M_R \leq k \leq M_R$ e $t \geq 0$

$$z_k^-(t) \leq \tilde{z}_k(t) \leq z_k^+(t). \quad (1.13)$$

Verificamos a desigualdade da esquerda, a outra é análoga pela simetria de nossa construção. Note que no tempo $t = 0$, como os processos começam do mesmo dado inicial vamos a ter a igualdade em (1.13), permanecendo iguais até o primeiro tempo t_1^k de forma que $(x_1^k, t_1^k) \in \mathcal{Q}$ e $x_1^k \in [\tilde{z}_{k-1}(t_1^k-), \tilde{z}_k(t_1^k-)]$. Neste instante $z^-(t_1^k-) = x_1^k$, por outra parte, é sorteado j , para $-R \leq j \leq R$, com probabilidade $p(j)$ e se $j \leq 0$ a partícula $\tilde{z}_k(t_1^k-)$ vai permanecer na mesma posição.

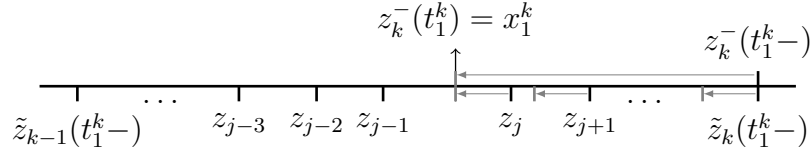


FIGURA 1.4: Deslocamento das partículas sob acoplamento básico.

Quando $j > 0$ as partículas $z_i(t_1^k-), z_{i+1}(t_1^k-), \dots, z_{i+j}(t_1^k-)$ vão se deslocar para a esquerda uma distancia de $z_i(t_1^k-) - x_1^k$ como abaixo (ver Figura 1.4),

$$\begin{aligned}
 z_i(t_1^k) &= x_1^k, \\
 z_{i+1}(t_1^k) &= z_{i+1}(t_1^k-) - [z_i(t_1^k-) - x_1^k], \\
 &\vdots \\
 z_{i+j}(t_1^k) &= z_{i+j}(t_1^k-) - [z_i(t_1^k-) - x_1^k].
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Note que se $i + j$, não atinge a posição correspondente ao sítio ocupado por $\tilde{z}_k(t_1^k-)$, não vai ter deslocamento desta partícula no tempo t_1^k , assim $z_k^-(t_1^k) \leq \tilde{z}_k(t_1^k)$. Caso contrário, o deslocamento vai ser de tamanho $z_i(t_1^k-) - x_1^k$, mas, o deslocamento da partícula z_k^- é de tamanho $z_k^-(t_1^k-) - x_1^k$. Como $z_i(t_1^k-) \leq z_k^-(t_1^k-)$, temos que $z_k^-(t_1^k) \leq \tilde{z}_k(t_1^k)$.

Analogamente como foi descrito acima, para um t_l^k tal que $(x_l^k, t_l^k) \in \mathcal{Q}$, com $x_l^k \in [\tilde{z}_{k-1}(t_l^k-), \tilde{z}_k(t_l^k-)]$, e vai existir algum subintervalo $[z_{i'-1}, z_{i'}]$ que contem x_l^k , repetindo o racocinio acima, $\tilde{z}_k(t_l^k-)$ no tempo t_l^k , vai se deslocar ao máximo $z_{i'}(t_l^k-) - x_l^k$. Por outra parte a partícula $z_k^-(t_l^k-)$ pode estar na esquerda de x_l^k , ou caso contrário, ser deslocada para x_l^k , se mantendo a desigualdade.

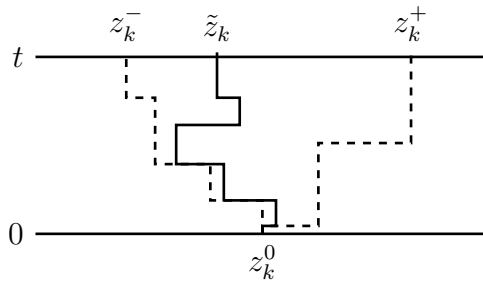


FIGURA 1.5: Trajetórias dos processos sob acoplamento básico.

Portanto, dividindo (1.13) por k^2 , tomando supremo e integrando,

$$E^{\eta^M} \left[\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\tilde{z}_k(t)}{k^2} \right|^p \right] \leq E^\eta \left[\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{z_k^-(t)}{k^2} \right|^p \right] \vee E^\eta \left[\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{z_k^+(t)}{k^2} \right|^p \right],$$

como a evolução dos processos $z^-(\cdot)$ e $z^+(\cdot)$ não dependem de M_R e temos a desigualdade para todos os valores de M_R ,

$$\sup_M E^{\eta^M} \left[\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\tilde{z}_k(t)}{k^2} \right|^p \right] \leq E^\eta \left[\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{z_k^-(t)}{k^2} \right|^p \right] \vee E^\eta \left[\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{z_k^+(t)}{k^2} \right|^p \right].$$

Pelo Lema 5.8 em Seppäläinen (1996), os termos à direita da desigualdade estão limitados, assim obtemos (1.12). \square

Corolário 1.3. *Seja $\eta \in Y$. Para cada $t > 0$ e $1 \leq p < \infty$*

$$\sup_M E^{\eta^M} \left[\sup_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i(t) \right|^p \right] < \infty. \quad (1.15)$$

Em particular, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $E[|\eta_k(t)|^p] < \infty$.

Demonstração. Notemos que

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i(t) \right|^p \leq \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \phi_i(t) \right|^p = \left| \frac{\tilde{z}_{n+1}}{n^2} - \frac{\tilde{z}_{-n}}{n^2} \right|^p \leq 2^{p-1} \left(\left| \frac{\tilde{z}_{n+1}}{n^2} \right|^p + \left| \frac{\tilde{z}_{-n}}{n^2} \right|^p \right).$$

tomando supremo e integrando, pelo lema anterior, temos (1.15). \square

Corolário 1.4. *Para cada $\varepsilon > 0$ e T , existe N tal que para cada $n \geq N$,*

$$\sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i(t) < \varepsilon$$

para quase toda trajetória.

Demonstração. Seja \tilde{z} como acima, pela desigualdade (1.13) e a monotonia do Processo de Hammersley clássico, temos que $z_k^-(T) \leq z_k^-(t) \leq \tilde{z}_k(t) \leq z_k^+(t) \leq z_k^+(T)$, desta forma

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i(t) &\leq \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \phi_i(t) = \sup_{t \in [0, T]} \left[\frac{\tilde{z}_{n+1}(t)}{n^2} - \frac{\tilde{z}_{-n}(t)}{n^2} \right] \\ &\leq \frac{z_{n+1}^+(T)}{n^2} - \frac{z_{-n}^-(T)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

quase certamente, pois $z^-(T)$ e $z^+(T)$ pertencem a Z para quase toda trajetória. \square

Corolário 1.5. *Seja $K \subset \mathbb{Z}$ finito, $\eta \in Y$ uma configuração inicial de bastões. Então, existem $i^-, i^+ \in \mathbb{Z}$, tal que,*

$$P \left\{ \max_{t \in [0, T]} \sum_{i \in K} \eta_i(t) \leq \sum_{i=i_K^-}^{i_K^+} \eta_i \right\} = 1.$$

Para a prova deste corolário vamos usar a representação dada por Seppäläinen (1996) do processo de Hammersley que será definida na seguinte proposição.

Proposição 1.6 (Proposição 4.4 em Seppäläinen (1996)). *Seja $z \in Z'$, denotemos por $\Gamma((z_i, 0), t, k)$ a distancia necessária para construir um caminho crescente* de k pontos em \mathcal{Q} começando em $(z_i, 0)$ até o tempo t (ver Figura 1.6). Para quase toda realização do processo de Poisson \mathcal{Q} : Para todo $t > 0$, $z(t) \in Z'$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem $-\infty < i^-(k, t) \leq i^+(k, t)$ tal que,*

$$z_k(t) = z_i + \Gamma((z_i, 0), t, k - i)$$

se tem para $i = i^\pm(k, t)$ e falha para todo $i < i^-(k, t)$ e $i > i^+(k, t)$.

*Dizemos que um caminho de pontos em \mathcal{Q} é *crescente* se quaisquer dos pontos (a_i, t_i) e (a_j, t_j) , com $i \leq j$, temos que $a_i \leq a_j$ e $t_i \leq t_j$.

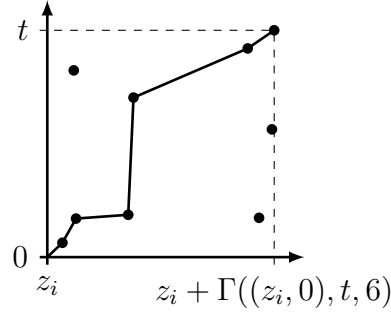


FIGURA 1.6: Caminho crescente de 6 pontos até o tempo t .

Demonstração do Corolário 1.5. Sejam $i_m = \min \{i : i \in K\}$ e $i_M = \max \{i : i \in K\}$, assim,

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \sum_{i \in K} \eta_i(t) &\leq \max_{t \in [0, T]} [\tilde{z}_{i_{M+1}}(t) - \tilde{z}_{i_m}(t)] \\ &\leq z_{i_{M+1}}^+(T) - z_{i_m}^-(T). \end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.6, como $\Gamma((z_i^0, 0), t, k - i) \geq 0$,

$$z_{i_m}^-(T) \stackrel{\text{dist.}}{=} z_i^0 + \Gamma((z_i^0, 0), T, i_m - i) \geq z_i^0,$$

para algum $i = i^\pm(k, t)$. Por outro lado

$$-z_{i_{M+1}}^+(T) \stackrel{\text{dist.}}{=} -z_{i'}^0 - \Gamma((z_{i'}^0, 0), T, i_M + 1 - i') \leq -z_{i'}^0,$$

para algum outro $i' = i^\pm(k, t)$.

Tomando $i_K^- = i'$ e $i_K^+ = i - 1$, teremos

$$\begin{aligned} P \left\{ \max_{t \in [0, T]} \sum_{i \in K} \eta_i(t) \leq \sum_{i=i_K^-}^{i_K^+} \eta_i \right\} &\geq P \left\{ z_i^0 + \Gamma((z_i^0, 0), T, i_M + 1 - i) \right. \\ &\quad \left. - z_{i'}^0 - \Gamma((z_{i'}^0, 0), T, i_m - i') \leq \sum_{i=i'}^{i-1} \eta_i \right\} \geq P \left\{ z_i^0 - z_{i'}^0 \leq \sum_{i=i'}^{i-1} \eta_i \right\} = 1. \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

1.3 Compacidade relativa

Depois destas estimativas estamos prontos para estudar a compacidade relativa da sequência de medidas de provabilidades P^{η^M} em $D([0, \infty), Y)$. Com este objetivo vamos seguir o enfoque utilizado em Ethier and Kurtz (1986) pela topologia de nosso espaço de estados.

Um conceito importante relacionado com a compacidade relativa é a *rigidez*. Dizemos que uma família de medidas de probabilidades $\{P^\nu\}_{\nu \in I}$, com I algum conjunto de índices, é *rígida*, se e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto compacto K , tal que

$$P^\nu(x \in K) > 1 - \varepsilon.$$

Também queremos ressaltar o fato que pelo Teorema de Prohorov (ver Billingsley (1999)) a rigidez é equivalente a compacidade relativa quando estamos trabalhando sobre um espaço de estados polonês.

Proposição 1.7 (Teorema 7.2 em Ethier and Kurtz (1986)). *A sequência de probabilidades P^M , é relativamente compacta em $D([0, \infty), Y)$ se, e somente se:*

(i) *Para cada t e $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset Y$ tal que*

$$\sup_M P^M[\eta^M(t) \notin K] \leq \varepsilon;$$

(ii) *para cada $\varepsilon > 0$ e $T < \infty$,*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_M P^M[w'(\eta, \delta, T) > \varepsilon] = 0,$$

com $w'(\eta, \delta, T) = \inf_{\{t_i\}_{i=0}^n} \max_{0 \leq i \leq n} \sup_{s, t \in [t_i, t_{i+1})} d(\eta(s), \eta(t))$, onde $\{t_i\}$ representa as partições tais que $\min_{0 \leq i < n} (t_{i+1} - t_i) > \delta$.

Com este resultado estamos prontos para provar a compacidade relativa de nossa sequência.

Proposição 1.8. *A sequência P^{η^M} é relativamente compacta em $D([0, \infty), Y)$.*

Demonstração. Para começar a prova é importante destacar que um conjunto K , é compacto em (Y, d) , se, e somente se, ele é compacto na métrica produto e satisfaz (ver Lema .10)

$$\limsup_n \sup_{\eta \in K} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i = 0. \quad (1.16)$$

Para provar (i) primeiro consideramos o subconjunto

$$K' = K'_\varepsilon = \left\{ \eta \in Y : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i \leq A_\varepsilon \right\}$$

que é relativamente compacto na topologia produto, por estar contido no produto da família de compactos, $\{\eta_i \in [0, \infty) : \eta_i \leq i^2 A_\varepsilon\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Assim, pelo Corolário 1.3

$$\begin{aligned} P^{\eta^M} \left[\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^M(t) > A \right] &\leq \frac{1}{A} E^{\eta^M} \left[\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^M(t) \right] \\ &\leq \frac{1}{A} \sup_{M'} E^{\eta^{M'}} \left[\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i(t) \right] \leq \frac{C}{A} \end{aligned}$$

Portanto, para cada ε , existe A_ε suficientemente grande, de modo que,

$$\sup_M P^{\eta^M} [\eta^M(t) \notin K'_\varepsilon] = \sup_M P^{\eta^M} \left[\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^M(t) > A_\varepsilon \right] < \varepsilon/2.$$

Agora resta verificar a condição (1.16). Para isso vemos que $K' \subset Y$, portanto para cada $\eta \in K'$,

$$\lim_n \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i = 0.$$

Pelo Teorema de Egorov, (ver Folland (1999)) para cada ε existe $K \subset K'$ com $P(K' \setminus K) < \varepsilon/2$ onde

$$f_n(\eta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i,$$

que é contínua (Lema .9), converge uniformemente para 0 sobre K , ou equivalentemente,

$$\limsup_n \sup_{\eta \in K} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i = 0.$$

Como as f_n e seu limite são contínuas em Y , podemos assumir K fechado sem perda de generalidade. O que nos permite concluir que K é compacto em nossa métrica e,

$$P^{\eta^M}[\eta^M(t) \notin K] = P^{\eta^M}[\eta^M(t) \notin K'] + P[\eta^M(t) \in K' \setminus K] < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

uniformemente em M .

Para provar a parte (ii), vamos usar uma versão do Critério de Aldous (Aldous (1978)) a qual fornece uma condição suficiente para segunda parte da Proposição 1.7.

Proposição 1.9. *A sequência de probabilidades P^M em $D([0, \infty), Y)$ satisfaz a condição (ii) da Proposição 1.7, se para cada $\varepsilon > 0$ e $T < \infty$,*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sup_M \sup_{\substack{\tau \leq T \\ \delta \leq \theta}} P^M[d(\eta^M(\tau + \delta), \eta^M(\tau)) \geq \varepsilon] = 0 \quad (1.17)$$

com τ tempo de parada limitado por T .

Seja $A_k = A(\tau, \tau + \delta, i - R, i + R)$ o evento que indica a ocorrência de k pontos de poisson no intervalo de tempo $[\tau, \tau + \delta]$, nos processos $(\mathcal{P}^j)_j$ para j nos sítios entre $i - R$

e $i + R$. Assim,

$$\begin{aligned}
P^{\eta^M}(|\eta_i^M(\tau + \delta) - \eta_i^M(\tau)| > \varepsilon) &\leq \sum_{k>0} P^{\eta^M}(|\eta_i^M(\tau + \delta) - \eta_i^M(\tau)| > \varepsilon | A_k) P(A_k) \\
&\leq P^{\eta^M}(|\eta_i^M(\tau + \delta) - \eta_i^M(\tau)| > \varepsilon | A_1) 2R\delta\bar{\eta}e^{-2R\delta\bar{\eta}} + o(\delta) \\
&\leq 2R\delta\bar{\eta}e^{-2R\delta\bar{\eta}} + o(\delta) \xrightarrow[\theta \downarrow 0]{\delta \leq \theta} 0
\end{aligned} \tag{1.18}$$

pois $A_k = A(\tau, \tau + \delta, i - R, i + R)$ indica a ocorrência de k pontos de poisson no intervalo de tempo $[\tau, \tau + \delta]$, nos sítios entre $i - R$ e $i + R$ e $\bar{\eta} = \sum_{j=i-R}^{i+R} \eta_j \geq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=i-R}^{i+R} \eta_j(t)$, quase certamente pelo Corolário 1.5 considerando $K = K_R = [i - R, i + R]$. Note que o limite não depende de M .

Seja agora $\gamma > 0$ arbitrário e M_T de forma que para cada $n \geq M_T$ (pelo Corolário 1.4)

$$\sup_M P^{\eta^M} \left(\sup_{t \in [0, T+1]} \frac{2}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^M(t) > \frac{\varepsilon}{3} \right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Pois M_T não depende de M .

Portanto,

$$\begin{aligned}
&P^{\eta^M} \left(\max_{1 \leq n \leq M} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^M(\tau + \delta) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^M(\tau) \right| > \varepsilon \right) \\
&\leq P^{\eta^M} \left(\max_{1 \leq n \leq M_T} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n |\eta_i^M(\tau + \delta) - \eta_i^M(\tau)| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&\quad + P^{\eta^M} \left(\sup_{t \in [0, T+1]} \frac{2}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^M(t) > \frac{\varepsilon}{2}; \quad n \geq M_T \right).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Como suposto acima o segundo termo a direita em (1.19) é menor do que $\gamma/2$. O primeiro termo, para cada i o valor absoluto dentro da soma vai para suficientemente pequeno com probabilidade grande por (1.18). Portanto, a probabilidade na esquerda de (1.19) está limitada por γ como se queria mostrar. \square

Corolário 1.10. *A sequência de processos $\{P^{\eta^M}\}$ converge em distribuição para um Processo de Markov $\{P^\eta\}$ com gerador*

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i} [f(\eta^{u,i,i+j}) - f(\eta)] du. \quad (1.20)$$

Demonstração. Seja P^η um ponto limite da sequência $\{P^{\eta^M}\}_{M \in \mathbb{N}}$, isto é, existe uma subseqüência $\{P^{\eta^{M'}}\} \subset \{P^{\eta^M}\}$ tal que $P^{\eta^{M'}} \rightarrow P^\eta$. Desta forma o correspondente semigrupo $S_{M'}(t)f$ converge para o semigrupo $S(t)f$ do processo $(P^\eta)_{\eta \in Y}$, para cada $t \geq 0$ e f limitada e contínua. Portanto, para cada f cilíndrica, limitada e contínua, que formam um núcleo[†] para os domínios dos operadores $\mathcal{L}^{M'}$ e \mathcal{L}' , onde \mathcal{L}' é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$, $\mathcal{L}^{M'} f \rightarrow \mathcal{L}' f$, quando $M' \rightarrow \infty$ (ver Teorema 1.6.1 em Ethier and Kurtz (1986)).

Por outra parte, quando $M \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}^M f$ converge para $\mathcal{L} f$ em (1.20), para f cilíndrica, limitada e contínua. De fato, para cada f , existe K tal que $\mathcal{L} f = \mathcal{L}^M f$ para todo $M \geq K$. Assim, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, qualquer seja \mathcal{L}' gerador do ponto limite, como acima. Isto é, \mathcal{L} coincide com o gerador infinitesimal de todo ponto limite da sequência $\{P^{\eta^M}\}$. \square

1.4 Algumas propriedades

Com o processo construído, podemos agora estudar algumas propriedades importantes dele. A primeira delas, que vai ser útil para futuras estimativas, vai ser a atratividade.

Proposição 1.11. *Dadas duas configurações iniciais $\eta, \xi \in Y$, com $\eta \leq \xi$, existe uma distribuição conjunta $P^{(\eta, \xi)}$, tal que $P^{(\eta, \xi)}(\eta(t) \leq \xi(t)) = 1$ para todo $t \geq 0$, de forma que as correspondentes marginais são os Processos P^η e P^ξ .*

Demonstração. Dadas duas configurações iniciais $\eta, \xi \in Y$, com $\eta \leq \xi$, construímos o acoplamento básico (η, ξ) . Seja $M > 0$, $\{\mathcal{P}^k\}$ uma realização da família de Processos de

[†]Seguindo a notação em Ethier and Kurtz (1986). Dado um operador fechado L , um subconjunto C do domínio de L é dito um *núcleo* se o fecho de L restringido a C coincide com L .

Poisson e uma sequência \mathcal{J} como definidos na Seção 1.1. Seguindo a evolução, também descrita na Seção 1.1, usando as mesmas trajetória de $\{\mathcal{P}^k\}$ e \mathcal{J} para ambas configurações, é claro que a desigualdade é mantida. De fato, seja $(b_l, t_l) \in \mathcal{P}^i$, se $b_l \leq \eta_i$ ambos bastões na i -ésima posição são quebrados no mesmo tamanho e um pedaço maior ou igual vai passar para ξ_{i+j_l} mantendo-se a desigualdade nesse sítio. No caso que $\eta_i \leq b_l \leq \xi_i$ só vai ser quebrado o bastão ξ_i em b_l deste modo não muda a desigualdade. Por último, se $\xi_i \leq b_l$ não acontece nenhuma mudança.

Fazemos tender M para infinito e chamamos $P^{(\eta, \xi)}$ o limite. Por construção as correspondentes marginais são P^η e P^ξ , como queríamos demonstrar. \square

1.4.1 Distribuição invariante

Outro fato muito importante para o estudo do processo é o conhecimento da medida invariante. Seja ν uma medida de probabilidade sobre Y e denotamos por $\nu\{f\} = \int f d\nu$ a esperança de f com respeito a medida ν . Esta notação vai ser usada no restante do trabalho. Dizemos que ν é invariante para o processo $\eta(\cdot)$, se $\nu\{S(t)f\} = \nu\{f\}$ para todo $t \geq 0$ e cada f limitada e contínua sobre Y , onde $S(\cdot)$ é o semigrupo associado ao processo $\eta(\cdot)$.

Como no caso totalmente assimétrico de Seppäläinen (1996), temos que a medida produto com marginais exponenciais, vai ser invariante para nosso processo. As boas e conhecidas propriedades desta distribuição vão fornecer estimativas muito úteis.

Na prova deste resultado utilizamos um procedimento similar com a prova de Seppäläinen (1996). Mas as estimativas a partir da expansão de (1.21) devem ser tratadas com mais cuidados pela complexidade adicional do nosso processo.

Proposição 1.12. *A distribuição onde os η_i , $i \in \mathbb{Z}$ são exponencial i.i.d. é invariante para o processo de bastões.*

Demonstração. Tomemos f uma função contínua e limitada sobre Y . Considere $S_M(t)$ semigrupo para o processo truncado $(\eta_k^M(\cdot))_{-M \leq k \leq M}$.

Então,

$$S_M(t)f(\eta) - f(\eta) = \int_0^t \mathcal{L}^M[S_M(s)f](\eta) ds.$$

Seja ν medida produto de exponenciais com media β^{-1} , assim

$$\nu\{S_M(t)f\} - \nu\{f\} = \int_0^t \nu\{\mathcal{L}^M[S_M(s)f]\} ds.$$

Sabemos que $S_M(t)f \rightarrow S(t)f$ quando $M \rightarrow \infty$ de forma pontual e limitada. Portanto, devemos provar que, $\nu\{\mathcal{L}^M[S_M(s)f]\} \rightarrow 0$, para cada s , quando $M \rightarrow \infty$.

Chamemos como $g(\eta) = g_M(\eta) = S_M(s)f(\eta)$, logo $g_M(\eta) = g(\eta_{-M}, \dots, \eta_M)$ e

$$\begin{aligned} \nu\{\mathcal{L}^M g(\eta)\} &= \sum_{j=-R}^R p(j) \sum_{i=-M}^M \nu\left\{\int_0^{\eta_i} [g(\eta^{u,i,i+j}) - g(\eta)] du\right\} \\ &= \sum_{j=-R}^R p(j) \left[\sum_{i=-M}^M \nu\left\{\int_0^{\eta_i} g(\eta^{u,i,i+j}) du\right\} - \sum_{i=-M}^M \nu\{\eta_i g(\eta)\} \right]. \end{aligned}$$

Chamemos $\tilde{\nu}$ a distribuição marginal para $(\eta_k)_{k \neq i, i+j}$, e consideremos o i -ésimo termo da primeira soma acima,

$$\begin{aligned} \nu\left\{\int_0^{\eta_i} g(\eta^{u,i,i+j}) du\right\} &= \tilde{\nu}\left\{\beta^2 \int_0^\infty d\eta_i \int_0^\infty d\eta_{i+j} e^{-\beta(\eta_i + \eta_{i+j})} \int_0^{\eta_i} du g(\eta^{u,i,i+j})\right\} \\ &= \tilde{\nu}\left\{\beta^2 \int_0^\infty du \int_0^\infty d\eta_{i+j} \int_u^\infty d\eta_i e^{-\beta(\eta_i + \eta_{i+j})} g(\eta^{u,i,i+j})\right\}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $\omega_i = \eta_i - u$ temos que a expressão acima coincide com

$$\tilde{\nu}\left\{\beta^2 \int_0^\infty du \int_0^\infty d\eta_{i+j} \int_0^\infty d\omega_i e^{-\beta(\omega_i + u + \eta_{i+j})} g((\eta_j)_{j \neq i, i+j}, \omega_i, \eta_{i+j} + u)\right\},$$

e agora fazendo a mudança $\omega_{i+j} = \eta_{i+j} + u$, obtemos

$$\begin{aligned} & \tilde{\nu} \left\{ \beta^2 \int_0^\infty du \int_u^\infty d\omega_{i+j} \int_0^\infty d\omega_i e^{-\beta(\omega_i + \omega_{i+j})} g((\eta_j)_{j \neq i, i+j}, \omega_i, \omega_{i+j}) \right\} \\ &= \tilde{\nu} \left\{ \beta^2 \int_0^\infty d\omega_i \int_0^\infty d\omega_{i+j} \int_0^{\omega_{i+j}} du e^{-\beta(\omega_i + \omega_{i+j})} g((\eta_j)_{j \neq i, i+j}, \omega_i, \omega_{i+j}) \right\} \\ &= \nu \{ \eta_{i+j} g(\eta) \}. \end{aligned}$$

Substituindo, vemos que

$$\begin{aligned} \nu \{ \mathcal{L}_M[S_M(s)f] \} &= \sum_{j=-R}^R p(j) \sum_{i=-M}^M \nu \{ \eta_{i+j} g(\eta) \} - \nu \{ \eta_i g(\eta) \} \\ &= \sum_{j=-R}^{-1} p(j) \sum_{i=-M}^M \nu \{ \eta_{i+j} g(\eta) \} - \nu \{ \eta_i g(\eta) \} \\ &\quad + \sum_{j=1}^R p(j) \sum_{i=-M}^M \nu \{ \eta_{i+j} g(\eta) \} - \nu \{ \eta_i g(\eta) \}. \end{aligned}$$

Cancelando os termos na soma telescópica, vamos ter

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-R}^{-1} p(j) \sum_{i=j}^{-1} \nu \{ \eta_{-M+i} g(\eta) \} - \nu \{ \eta_{M-i+j} g(\eta) \} \\ & \quad + \sum_{j=1}^R p(j) \sum_{i=1}^j \nu \{ \eta_{M+i} g(\eta) \} - \nu \{ \eta_{-M-i+j} g(\eta) \}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Adicionando e subtraindo $\eta_{M-i+j} g_{M-i+j-1}(\eta)$ nos termos na primeira soma em (1.21), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \sum_{i=j}^{-1} \nu \{ \eta_{-M+i} g_M(\eta) \} - \nu \{ \eta_{M-i+j} g_M(\eta) \} \\ &= \sum_{i=j}^{-1} \left[\nu \{ \eta_{-M+i} g_M(\eta) \} - \nu \{ \eta_{M-i+j} g_{M-i+j-1}(\eta) \} \right] \\ & \quad - \sum_{i=j}^{-1} \nu \{ \eta_{M-i+j} [g_M(\eta) - g_{M-i+j-1}(\eta)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=j}^{-1} \nu(\eta_0) \nu \{g_M(\eta) - g_{M-i+j-1}(\eta)\} \\
&\quad - \sum_{i=j}^{-1} \nu \{\eta_{M-i+j} [g_M(\eta) - g_{M-i+j-1}(\eta)]\}.
\end{aligned}$$

Note que na primeira soma o termo, sendo $|f| \leq B$,

$$|g_M(\eta) - g_{M-i+j-1}(\eta)| = |S_M(s)f(\eta) - S_{M-i+j-1}(s)f(\eta)| \leq 2B,$$

portanto, podemos tomar limite quando $M \rightarrow \infty$ e esta soma vai para zero. Por outra parte, os termos na segunda soma,

$$\nu \{\eta_{M-i+j} [g_M(\eta) - g_{M-i+j-1}(\eta)]\} \leq \nu(\eta_0^2)^{\frac{1}{2}} \nu \{[g_M(\eta) - g_{M-i+j-1}(\eta)]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

onde o argumento na segunda integral é limitado por $4B^2$. Portanto, podemos tomar limite e a segunda soma vai para zero.

Analogamente somamos e subtraímos $\eta_{-M-i+j}g_{M+i-j-1}(\eta)$ na segunda soma de (1.21) e obtemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j \nu \{\eta_{M+i}g_M(\eta)\} - \nu \{\eta_{-M-i+j}g_M(\eta)\} &= \sum_{i=1}^j \nu(\eta_0) \nu \{g_M(\eta) - g_{M+i-j-1}(\eta)\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^j \nu \{\eta_{-M-i+j} [g_M(\eta) - g_{M+i-j-1}(\eta)]\}.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo procedimento, podemos ver que ambas somas vão para zero quando $M \rightarrow \infty$, desta forma, $\nu\{\mathcal{L}^M[S_M(s)f]\} \rightarrow 0$. \square

Capítulo 2

Limite Hidrodinâmico

Nos trabalhos de Suzuki and Uchiyama (1993) e Ekhaus and Seppäläinen (1996) foi estudado o limite hidrodinâmico para modelos simétricos do Processo de Bastões no toro. Eles usaram essencialmente a metodologia de estimadores da entropia introduzida por Guo et al. (1988). O caso totalmente assimétrico em \mathbb{Z} foi estudado por Seppäläinen (1996) usando a formula de Lax-Oleinik e aplicando o Teorema Ergódico de Liggett no Processo de Hammersley.

Neste trabalho estudaremos o limite hidrodinâmico do Processo de Bastões, introduzido no capítulo anterior, em dois casos (quando $p(\cdot)$ tem média zero ou não zero). O resultado fundamental deste capítulo (Teorema 2.1) vai incluir dois casos. Primeiramente o caso com média zero, que em contraste com os trabalhos mencionados acima, fazemos uma extensão para o espaço não compacto \mathbb{Z} (ou \mathbb{R} no nível macroscópico). A segunda parte, o caso com média não zero, vai ser desenvolvido no capítulo seguinte por seguir uma metodologia diferente devido a dificuldade com a unicidade da equação diferencial obtida.

2.1 Preliminares

Consideremos a medida empírica α_t^N definida como

$$\alpha_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i(t) \delta_{\frac{i}{N}}, \quad (2.1)$$

onde o espaço é redimensionado na escala $\frac{1}{N}$.

Deste modo dada uma função teste $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, podemos integrá-la com respeito a dita medida como

$$\alpha_t^N \{\phi\} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i(t) \phi\left(\frac{i}{N}\right). \quad (2.2)$$

Dado um processo de Markov e seu gerador infinitesimal, denotado por \mathcal{L} , para qualquer função definida no domínio de \mathcal{L} , sabemos que

$$M_t = f(\eta(t)) - f(\eta(0)) - \int_0^t \mathcal{L} f(\eta(s)) ds$$

é um martingal com respeito à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma\{\eta(s) : 0 \leq s \leq t\}$.

Se tomamos $f(\eta(t)) = \alpha_t^N \{\phi\} = N^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i(t) \phi\left(\frac{i}{N}\right)$, substituindo acima obtemos

$$M_t = \alpha_t^N \{\phi\} - \alpha_0^N \{\phi\} - \int_0^t \mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\} ds. \quad (2.3)$$

Se consideramos o processo de bastões, ou seja, tomamos \mathcal{L} como em (1.20), note que

$$\begin{aligned} f(\eta^{u,i,i+j}) - f(\eta) &= (\eta_i - u) \phi\left(\frac{i}{N}\right) - \eta_i \phi\left(\frac{i}{N}\right) + (\eta_{i+j} + u) \phi\left(\frac{i+j}{N}\right) - \eta_{i+j} \phi\left(\frac{i+j}{N}\right) \\ &= \frac{u}{N} \left[\phi\left(\frac{i+j}{N}\right) - \phi\left(\frac{i}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

por conseguinte,

$$\mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \frac{\eta_i^2(s)}{2} \left[\phi\left(\frac{i+j}{N}\right) - \phi\left(\frac{i}{N}\right) \right]$$

Fazendo a expansão de Taylor para ϕ no ponto $\frac{i}{N}$,

$$\phi\left(\frac{i+j}{N}\right) = \phi\left(\frac{i}{N}\right) + \frac{j}{N}\phi'\left(\frac{i}{N}\right) + \cdots + \frac{j^k}{k!N^k}\phi^{(k)}\left(\frac{i}{N}\right) + \frac{j^{k+1}}{(k+1)!N^{k+1}}\phi^{(k+1)}(\gamma_i),$$

onde γ_i está entre $\frac{i}{N}$ e $\frac{i+j}{N}$.

Vamos supor primeiro que $m = \sum_{j=-R}^R p(j)j = 0$. Neste caso, precisamos usar a expansão de segunda ordem, pois o termo de primeira ordem vai se anular ao substituir no gerador. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\alpha_s^N\{\phi\} &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \frac{\eta_i^2(s)}{2} \left[\phi'\left(\frac{i}{N}\right) \frac{j}{N} + \frac{j^2}{2N^2} \phi''\left(\frac{i}{N}\right) + \frac{j^3}{6N^3} \phi'''(\gamma_i) \right] \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{4} \sum_{j=-R}^R p(j) j^2 \phi''\left(\frac{i}{N}\right) + \frac{m_3}{6N^4} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi'''(\gamma_i) \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} A_2 \phi\left(\frac{i}{N}\right) + \mathcal{O}(N^{-3})^*, \end{aligned}$$

onde vamos ter o operador linear $A_2 \phi = \frac{\sigma^2}{2} \phi''$, com σ^2 sendo a variância de uma variável com distribuição de probabilidade $p(\cdot)$ e m_3 seu momento de terceira ordem.

Observe que, se tomamos limite quando $N \rightarrow \infty$, $M_t \rightarrow 0$ em probabilidade (Lema 2.2) e o terceiro termo na direita vai se anular. Nesse caso, o possível limite para α^N vai satisfazer uma relação trivial não observando-se evolução temporal no nível macroscópico. Para esta situação, precisamos de uma escala temporal adequada que permita observar a evolução macroscópica de interesse. Portanto, reescalamos o tempo em N^2 vezes[†], considerando um novo processo com gerador infinitesimal dado por $N^2 \mathcal{L}$, assim

$$M_t = \alpha_t^N\{\phi\} - \alpha_0^N\{\phi\} - \int_0^t \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} A_2 \phi\left(\frac{i}{N}\right) + \mathcal{O}(N^{-2}) \right] ds.$$

*Na notação de Landau, dizemos que $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ se, e somente se, existe $M > 0$ e x_0 , tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$, para cada $x \geq x_0$.

[†]Esta escala temporal é conhecida como *escala difusiva*.

Vejamos agora quando $m = \sum_{j=-R}^R p(j)j \neq 0$. Fazendo expansão de ϕ no termo de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\} &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \frac{\eta_i^2(s)}{2} \left[\phi' \left(\frac{i}{N} \right) \frac{j}{N} + \frac{j^2}{2N^2} \phi''(\gamma_i) \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} \sum_{j=-R}^R p(j) j \phi' \left(\frac{i}{N} \right) + \frac{\sigma^2}{2N^3} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi''(\gamma_i) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} A_1 \phi \left(\frac{i}{N} \right) + \mathcal{O}(N^{-2}), \end{aligned}$$

sendo o operador linear $A_1 \phi = m \phi'$.

Quando substituimos na equação (2.3), analogamente ao caso anterior, vamos precisar agora reescalar o tempo por N , tendo-se assim,

$$M_t = \alpha_t^N \{\phi\} - \alpha_0^N \{\phi\} - \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} A_1 \phi \left(\frac{i}{N} \right) ds + \mathcal{O}(tN^{-1}).$$

2.1.1 Solução fraca

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + L_x(u^2) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde L_x é um operador diferencial em x de primeira ou segunda ordem. Seja $\phi \in C_c^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, uma função de suporte compacto sobre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ que é continuamente diferenciável e duas vezes continuamente diferenciável com respeito a primeira e segunda variável respectivamente. Se multiplicamos a equação (2.5) por ϕ e integramos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \phi(s, x) \partial_s u(s, x) ds dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \phi(s, x) L_x(u^2(s, x)) dt dx = 0,$$

integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, x)u(t, x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(0, x)u_0(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \partial_s \phi(s, x)u(s, x)dsdx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t L_x^* \phi(s, x)u^2(s, x)dtdx, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde L_x^* é o operador diferencial adjunto de L_x .

Deste modo, dizemos que u é uma *solução fraca* (ou *generalizada*) do problema (2.5) se satisfaz a relação (2.6) para cada $\phi \in C_c^{1,\ell}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, onde ℓ é a ordem do operador diferencial L_x . Em particular se ϕ somente depende da variável espacial x , isto é $\phi \in C^\ell(\mathbb{R})$ a equação (2.6) vai ficar na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)u(t, x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)u_0(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t L_x^* \phi(x)u^2(s, x)dtdx. \quad (2.7)$$

No decorrer do capítulo vamos a considerar solução fraca no sentido da equação (2.7), ou seja, vamos a usar funções teste dependendo só da variável espacial.

Quando $L_x^* \phi(x) = A_2 \phi(x) = \frac{\sigma^2}{2} \phi''(x)$ estamos na presença de nosso primeiro caso (média zero). Vários trabalhos, por exemplo, Dahlberg and Kenig (1984) e Andreucci and DiBenedetto (1992), mostraram a existência e unicidade da solução fraca. Este resultado vai ser usado neste capítulo na prova da primeira parte do Teorema 2.1. Porém no caso em que $L_x^* \phi(x) = A_1 \phi(x) = m\phi'(x)$, (média não nula) é conhecida a não existência de unicidade da solução fraca. No trabalho de Kružkov (1970) é mostrado que a classe das soluções satisfazendo a condição de entropia (3.2), discutida no capítulo seguinte, é única no sentido fraco (2.6). Uma solução fraca satisfazendo (3.2) é dita uma *solução fraca entrópica*.

2.2 Limite hidrodinâmico

Tomamos um perfil inicial $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ Borel mensurável não negativo, definimos para cada N , uma configuração inicial $\eta = (\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sob a medida $\mu_0 = \mu_0^N$ sobre Y onde as variáveis η_i são exponenciais independentes com média dada por

$$v(i) = \mu_0\{\eta_i\} = \frac{N}{2} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i+1}{N}} u_0(\xi) d\xi. \quad (2.8)$$

Nesse caso denotamos como $\mu_0 \sim u_0$. Vemos que desta forma $\mu_0\{\eta_i\} \leq C_0$, com $C_0 = \|u_0\|_\infty$.

Seja ν sobre Y de forma que a configuração $\zeta = (\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, satisfaz que os ζ_i são i.i.d. exponenciais com media C_0 . Onde a distribuição do par (η_i, ζ_i) é tal que $\eta_i = \frac{v(i)}{C_0} \zeta_i$ e as correspondentes marginais são μ_0 e ν respectivamente. Vemos que existe uma medida de probabilidade sobre $Y \times Y$, tal que se $\eta \leq \zeta$ quase certamente

$$P^{(\eta, \zeta)}\{(\eta(\cdot), \zeta(\cdot)) : \eta(\cdot) \leq \zeta(\cdot)\} = 1, \quad (2.9)$$

pela atratividade do processo (Proposição 1.11).

Portanto, μ_0 é uma medida produto de exponenciais independentes e que $\alpha_0^N \rightarrow u_0(x)dx$ em μ_0 -probabilidade, quando $N \rightarrow \infty$. Além disso, se supomos adicionalmente que $v(i) > 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, então μ_0 restringida a compactos e absolutamente continua com respeito a ν .

Teorema 2.1. *Dados $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ não negativa e η_i exponenciais independentes com média $v(i)$ sob μ_0 , então, para cada $t > 0$, $\phi \in C_c^\ell(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \alpha_{tN^\varepsilon}^N \{\phi\} - \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u(t, x) dx \right| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (2.10)$$

Onde,

(i) se $m = \sum_{j=-R}^R p(j)j = 0$ e $\sigma^2 = \sum_{j=-R}^R p(j)j^2 > 0$; $\ell = 2$ e $u(t, x)$ é a única solução fraca da equação do meio poroso

$$\partial_t u = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 (u^2); \quad (2.11)$$

(ii) se $m = \sum_{j=-R}^R p(j)j \neq 0$; $\ell = 1$ e $u(t, x)$ é a única solução fraca entrópica da equação de Burgers

$$\partial_t u + m \partial_x (u^2) = 0. \quad (2.12)$$

2.3 Prova do Teorema 2.1

A demonstração do Teorema 2.1 vai ser dividida em várias partes. Primeiramente usamos a representação do processo no Problema de Martingal, Holley and Stroock (1976), para estudar o comportamento da sequência α_t^N .

$$M_t = M_t^N(\phi) = \alpha_t^N\{\phi\} - \alpha_0^N\{\phi\} - \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} A_\ell \phi\left(\frac{i}{N}\right) ds + \mathcal{O}(tN^{-1}). \quad (2.13)$$

Usando as estimativas obtidas na seção 2.1, vamos a seguir o seguintes passos:

Passo 1: Estimação do martingal. Mostraremos que o martingal M_t em (2.13) vai para zero em probabilidade quando $N \rightarrow \infty$, obtendo que,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \alpha_t^N\{\phi\} - \alpha_0^N\{\phi\} - \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} A_\ell \phi\left(\frac{i}{N}\right) ds \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Passo 2: Compacidade relativa. Iremos mostrar que a família das medidas empíricas α_t^N é relativamente compacta no espaço $D([0, \infty), \mathcal{M})$, onde consideramos \mathcal{M} como o espaço das medidas positivas de Borel finitas sobre \mathbb{R} .

Passo 3: Equilíbrio local. Veremos que o termo integral em (2.13) está próximo de

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} A_\ell \phi(x) u^2(s, x) dx ds,$$

o que permite concluir que as trajetórias dos pontos limites satisfazem a forma fraca da equação diferencial. Esta substituição vai ser feita em dois passos principais: primeiro vamos aproximar a expressão η_i^2 pela média em blocos grandes ao nível microscópico. Depois usaremos estes blocos para aproximar pequenos blocos ao nível macroscópico.

Assumiremos a condição adicional que o perfil inicial seja estritamente positivo, mas esta hipóteses sera removida no final da prova.

Passo 4: Distribuição dos Pontos limites. Neste passo, vai ser provado que as trajetórias onde estão concentrados os pontos limites, são absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue. Juntando este resultado com o passo anterior, iremos concluir que as densidades das trajetórias onde os pontos limites estão concentrados são solução fraca da equação diferencial estudada.

Passo 5: Unicidade. Como foi observado na subseção 2.1.1, temos unicidade para a solução fraca da equação diferencial (2.11). Portanto, podemos concluir que os pontos limites estão concentrados em trajetórias com densidade a única solução fraca de dita equação diferencial. Além disso, como esta trajetória é absolutamente contínua, concluimos também, a convergência em probabilidade de α_\bullet^N para $u(\bullet, x)dx$, onde u é dita solução.

Por outro lado, como em geral, a equação (2.12) não tem solução única, será utilizada outra metodologia para concluir a segunda parte do Teorema 2.1. Este procedimento vai ser feito separadamente no Capítulo 3. Mostraremos que nossa medida empírica converge em probabilidade à única solução fraca entrópica da equação (2.12).

Passo 6: Removendo a hipóteses de estritamente positiva. O último passo da prova consiste em, para um dado inicial $u_0 \geq 0$, fazer aproximação por meio de

soluções com dado inicial $u_0^\varepsilon = u_0 + \varepsilon$. Desta forma concluímos a primeira parte da prova do Teorema 2.1.

2.3.1 Estimação do martingal

Lema 2.2. *Para cada $T < \infty$ e $\varepsilon > 0$, $P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2 > \varepsilon \right] \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Em virtude da Desigualdade de Chebyshev basta mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2 \right] = 0.$$

É conhecido que

$$V_t = M_t^2 - \int_0^t \gamma(s) ds, \quad (2.14)$$

com $\gamma(s) = N^\ell \mathcal{L} f^2(\eta(s)) - 2f(\eta(s))N^\ell \mathcal{L} f(\eta(s))$ é um martingal, para $\ell = 1, 2$ segundo corresponda com média zero ou não zero respectivamente, assim

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= N^\ell \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i} [f^2(\eta^{u,i,i+j}) - 2f(\eta^{u,i,i+j})f(\eta) + f^2(\eta)] du \\ &= N^\ell \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i} [f(\eta^{u,i,i+j}) - f(\eta)]^2 du \\ &= N^\ell \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i} \frac{u^2}{N^2} [\phi(\frac{i+j}{N}) - \phi(\frac{i}{N})]^2 du \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \frac{\eta_i^3(s)}{3N^{2-\ell}} [\phi(\frac{i+j}{N}) - \phi(\frac{i}{N})]^2 \\ &= \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp}(\phi)} \sum_{j=-R}^R p(j) \frac{\eta_i^3(s)}{3N^{2-\ell}} [\phi(\frac{i+j}{N}) - \phi(\frac{i}{N})]^2. \end{aligned}$$

Onde $\text{Sp}(\phi)$ representa o suporte de ϕ . Usando a condição de Lipschitz para a função ϕ

$$\gamma(s) \leq \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp}(\phi)} \sum_{j=-R}^R p(j) \frac{\eta_i^3(s) K j^2}{3N^{2-\ell} N^2} = \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp}(\phi)} \eta_i^3(s) \cdot \mathcal{O}(N^{-4+\ell}),$$

Aplicando a desigualdade maximal de Doob e o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} E[\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2] &\leq E[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|]^2 \leq 4E[M_T^2] = 4E\left[\int_0^T \gamma(s) ds\right] \\ &\leq 4E \int_0^T \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp}(\phi)} \eta_i^3(s) ds \cdot \mathcal{O}(N^{-4+\ell}) \\ &= 4 \int_0^T \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp}(\phi)} E\eta_i^3(s) ds \cdot \mathcal{O}(N^{-4+\ell}) \\ &\leq 4 \int_0^T \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp}(\phi)} E\zeta_i^3 ds \cdot \mathcal{O}(N^{-4+\ell}) = \mathcal{O}(TN^{-3+\ell}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

pois $\text{Sp}(\phi) \subset \left[-\frac{K_\phi}{2}, \frac{K_\phi}{2}\right]$ contendo no máximo $K_\phi N$ pontos da forma i/N e $E\zeta^p(t)$ é constante para todo t , pois ζ são bastões i.i.d. exponenciais com média C_0 , como no acoplamento em (2.9). Como $\ell < 3$, tomando limite quando $N \rightarrow \infty$ a expressão acima vai para zero como se queria mostrar. \square

Observação. Como foi dito acima, o tempo foi reescalado por N no caso media não zero e N^2 no caso de média zero. Para reduzir notação na prova anterior foi introduzida a letra $\ell = 1, 2$ para especificar cada caso em uma expressão só. Pela similaridade da prova em ambos casos, usamos esta notação no restante do capítulo.

2.3.2 Compacidade relativa de $(\alpha^N)_{n \in \mathbb{N}}$

Para provar a compacidade relativa da sequência α^N em $D([0, \infty), \mathcal{M})$ é suficiente considerar que para cada $\phi \in C_c^2(\mathbb{R})$, $\alpha^N\{\phi\}$ é relativamente compacta em $D([0, \infty), \mathbb{R})$. Pois, o espaço $C_c^2(\mathbb{R})$ é denso em $C(\mathbb{R})$ na topologia uniforme.

Seja a sequência de probabilidade $\{P^N\}$ correspondente ao processo a valores reais $\{\alpha_t^N; t \in [0, T]\}$.

Lema 2.3. *A sequência $\{P^N\}$ é relativamente compacta.*

Demonstração. Primeiro devemos provar que, dado um $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que para cada t , $P[\alpha_t^N \{\phi\} \notin K] \leq \varepsilon$. Seja $B > 0$,

$$P[\alpha_t^N \{\phi\} > B] \leq \frac{1}{BN} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp}(\phi)} E\eta_i(t)\phi(\frac{i}{N}) \leq \frac{1}{BN} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp}(\phi)} E\zeta_i\phi(\frac{i}{N}) \leq \frac{C_0}{B},$$

pois ζ_i são bastões exponenciais i.i.d. com média C_0 , como no acoplamento em (2.9). Tomando $B = C_0/\varepsilon$, definimos $K = [-B, B]$ e temos o resultado desejado.

Agora, para cada $\varepsilon > 0$, devemos provar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P \left[\sup_{|t-s| < \delta} |\alpha_t^N \{\phi\} - \alpha_s^N \{\phi\}| > \varepsilon \right] = 0. \quad (2.16)$$

Mas,

$$|\alpha_t^N \{\phi\} - \alpha_s^N \{\phi\}| \leq |M_t^N - M_s^N| + \int_s^t |N^\ell \mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\}| ds.$$

Usando a desigualdade de Chebyshev em (2.16), é suficiente mostrar que

$$E \left[\sup_{|s-t| < \delta} (M_t^N - M_s^N)^2 \right] \text{ e } E \left[\sup_{|s-t| < \delta} \left(\int_s^t |N^\ell \mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\}| ds \right)^2 \right],$$

vão para zero, quando $N \rightarrow \infty$. Desenvolvendo o quadrado e usando a desigualdade (2.15) na primeira esperança

$$E \left[\sup_{|s-t| < \delta} (M_t^N - M_s^N)^2 \right] \leq 4E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2 \right] \leq 16E [M_T^2] = \mathcal{O}(TN^{-3+\ell}).$$

Por outro lado, usando Cauchy-Schwarz na segunda esperança,

$$\begin{aligned}
& \sup_{|s-t|<\delta} \left(\int_s^t |N^\ell \mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\}| ds \right)^2 \leq \sup_{|s-t|<\delta} (t-s) \int_s^t (N^\ell \mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\})^2 ds \\
& \leq \delta \int_0^T (N^\ell \mathcal{L} \alpha_s^N \{\phi\})^2 ds \\
& \leq \delta \int_0^T \left(\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \frac{\eta_i^2(s)}{2} N^\ell \left| \phi\left(\frac{i+j}{N}\right) - \phi\left(\frac{i}{N}\right) \right| \right)^2 ds \\
& \leq \delta \int_0^T \left(\frac{1}{N} \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp} \phi} \frac{\eta_i^2(s)}{2} \sum_{j=-R}^R p(j) N^\ell \left| \phi\left(\frac{i+j}{N}\right) - \phi\left(\frac{i}{N}\right) \right| \right)^2 ds \\
& \leq \delta K_\phi^2 \int_0^T \left(\frac{1}{N} \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp} \phi} \frac{\eta_i^2(s)}{2} \right)^2 ds \leq \delta K_\phi^2 \int_0^T \frac{C}{N} \sum_{\frac{i \pm R}{N} \in \text{Sp} \phi} \frac{\eta_i^4(s)}{4} ds,
\end{aligned}$$

onde K_ϕ é uma constante que depende da primeira e segunda derivada de ϕ e o primeiro ou segundo momento de $p(\cdot)$, segundo seja assimétrica ou simétrica respectivamente. Tomando esperança, a soma dos η_i está limitada pela soma dos ζ_i (exponenciais i.i.d., como no acoplamento (2.9)). Portanto, dita esperança está limitada por $C'T\delta$, onde C' é uma constante que depende de K_ϕ , $C_0 = E\zeta_i$ e o suporte de ϕ .

Juntando estas estimativas, obtemos que a probabilidade em (2.16), está limitada por $C'''T(N^{-1} + \delta)$, anulando-se o limite. \square

Observação. Seja α_t trajetória de \mathcal{P} ponto limite de $\{P^N\}$, então, $\alpha_t \in C([0, T], \mathcal{M})$, \mathcal{P} -quase certamente, pois

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P} \left[\sup_{|s-t|<\delta} |\alpha_s \{\phi\} - \alpha_t \{\phi\}| > \varepsilon \right] \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left[\sup_{|s-t|<\delta} |\alpha_s^N \{\phi\} - \alpha_t^N \{\phi\}| > \varepsilon \right],$$

que se anula por (2.16). \square

2.3.3 Equilíbrio local

Para começar com a verificação do equilíbrio local, vamos seguir um roteiro similar ao procedimento utilizado por Ekhaus and Seppäläinen (1996) para a prova das estimativas de um e dois blocos. Adicionalmente vai ser necessário prestar atenção aos sítios dentro do suporte da função teste pela natureza não compacta do espaço de estados. Além disso, a igualdade (2.29) foi provada utilizando outra ideia; Ekhaus and Seppäläinen (1996) usa estimados da entropia relativa.

O objetivo desta seção é mostrar que os pontos limites da sequência α^N estão concentrados em trajetórias que são soluções fracas. Para chegar neste resultado, vemos primeiro que o termo integral em (2.13) pode ser aproximado por um mais apropriado. Ou seja, temos o seguinte lema.

Lema 2.4 (Lema de Substituição). *Para cada $\phi \in C_c^2(\mathbb{R})$ e $\delta > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) \left| \eta_i^2(s) - 2(\alpha_s^N \{\chi_{\frac{i}{N}}^\varepsilon\})^2 \right| ds > \delta \right\} = 0, \quad (2.17)$$

onde $\chi_x^\varepsilon(y) = (2\varepsilon)^{-1} \mathbf{1}_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]}(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$.

Fazendo substituição dada pelo Lema 2.4 no termo integral em (2.13), teremos

$$\int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} A_\ell \phi\left(\frac{i}{N}\right) (\alpha_s^N \{\chi_{\frac{i}{N}}^\varepsilon\})^2 ds,$$

usando suavidade de ϕ ele é próximo, para N suficientemente grande, de

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} A_\ell \phi(x) (\alpha_s^N \{\chi_x^\varepsilon\})^2 dx ds.$$

Usando o Lema 2.10, as trajetórias onde estão concentrados os pontos limites de $\{P^N\}$ são absolutamente contínuas com respeito Lebesgue $\mathcal{P} \otimes dt$ -quase certamente. Assim, existe $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_t \{\phi\} = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u(t, x) dx. \quad (2.18)$$

Fazendo estas mudanças no martingal em (2.13),

$$\mathcal{P} \left\{ \left| \alpha_t \{ \phi \} - \alpha_0 \{ \phi \} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} A_\ell \phi(x) \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u(s, y) dy \right)^2 dx ds \right| > \delta \right\} \quad (2.19)$$

está limitada superiormente por

$$\begin{aligned} & \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}^N \left\{ \left| \alpha_t \{ \phi \} - \alpha_0 \{ \phi \} - \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\eta_i^2(s)}{2} A_\ell \phi\left(\frac{i}{N}\right) ds + \mathcal{O}(tN^{-1}) \right| > \delta \right\} \\ &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}^N \{ |M_t| > \delta \} = 0, \end{aligned}$$

pelo Lema 2.2.

Além disso, pelo Teorema de diferenciação de Lebesgue, temos que,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u(s, y) dy \right)^2 = u^2(s, x),$$

para quase todo x . Por outro lado, seja u como em (2.18), para cada $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \phi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) u(t, x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} E^N \alpha_t^N \{ \phi \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) E \eta_i(t) \leq C_0 \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx,$$

onde $C_0 = E \zeta_i = \|u_0\|_\infty$, como no acoplamento (2.9), portanto, $u(t, x) \leq \|u_0\|_\infty$. Usando convergência dominada a probabilidade em (2.19), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, coincide com

$$\mathcal{P} \left\{ \left| \alpha_t \{ \phi(x) \} - \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u_0(x) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} A_\ell \phi(x) u^2(s, x) dx ds \right| > \delta \right\}.$$

Desta forma, vemos que os pontos limites \mathcal{P} de $\{P^N\}$ estão concentrados em trajetórias absolutamente contínuas com densidade u . Uma vez seja verificada a unicidade desta (que será discutida na Subseção 2.3.6), teremos que $\alpha_t = \int u(t, x) dx$ é limite fraco da sequência α_t^N . Como este limite é absolutamente contínuo com respeito a Lebesgue, decorre a convergência em probabilidade $\alpha_t^N \rightarrow \alpha_t$, quando $N \rightarrow \infty$, onde α_t tem densidade $u(t, x)$.

2.3.4 Prova do Lema de Substituição (Lema 2.4)

A prova do Lema 2.4 vai ser dividida em vários passos. Primeiro para entender o termo introduzido na integral em (2.17), vemos que pode ser escrito como,

$$\begin{aligned}
\alpha_s^N \{\chi_{\frac{i}{N}}^\varepsilon\} &= \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2\varepsilon)^{-1} \mathbb{1}_{[\frac{i}{N}-\varepsilon, \frac{i}{N}+\varepsilon]}(\frac{j}{N}) \eta_j(s) \\
&= \frac{1}{2N\varepsilon} \sum_{|i-j| \leq N\varepsilon} \eta_j(s) \\
&= \frac{2\lfloor N\varepsilon \rfloor + 1}{2N\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\lfloor N\varepsilon \rfloor + 1} \sum_{j=i-\lfloor N\varepsilon \rfloor}^{i+\lfloor N\varepsilon \rfloor} \eta_j(s) \\
&= [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] S_{\lfloor N\varepsilon \rfloor}(\eta_i(s)),
\end{aligned}$$

onde S_L é definido como,

$$S_L(\eta_i) = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=i-L}^{i+L} \eta_j.$$

Simplificando a notação, vamos escrever $N\varepsilon$ em vez de $\lfloor N\varepsilon \rfloor$. Assim, (2.17) no Lema 2.4 pode ser escrito como,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(\frac{i}{N}) \left| \eta_i^2(s) - 2S_{N\varepsilon}^2(\eta_i(s)) \right| ds > \delta \right\} = 0. \quad (2.20)$$

Para provar dita desigualdade vamos aproxima-la primeiro num bloco no nível microscópico de tamanho grande L independente e menor do que N . Ou seja, vamos adicionar e subtrair dentro do valor absoluto em (2.20) o termo

$$[S_L(\eta_i^2(s)) - 2S_L^2(\eta_i(s))]. \quad (2.21)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) \left| \eta_i^2(s) - 2S_{N\varepsilon}^2(\eta_i(s)) \right| ds > \delta \right\} \\
& \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) \left| S_L(\eta_i^2(s)) - 2S_L^2(\eta_i(s)) \right| ds > \delta \right\} \quad (2.22) \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) \left| \eta_i^2(s) - S_L(\eta_i^2(s)) \right| ds > \delta \right\} \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ 2 \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) \left| S_L^2(\eta_i(s)) - S_{N\varepsilon}^2(\eta_i(s)) \right| ds > \delta \right\}.
\end{aligned}$$

Se tomamos limite quando $L \rightarrow \infty$ em ambos membros, a probabilidade no lado esquerdo de (2.22) não vai se alterar pois não depende de L . O primeiro termo na direita está limitado por

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \|\phi\|_\infty \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \left| S_L(\eta_i^2(s)) - 2S_L^2(\eta_i(s)) \right| ds > \delta \right\},$$

que vai-se anular, como será mostrado no Lema 2.6.

O segundo termo na direita em (2.22) também pode ser mostrado que se anula usando o Lema 2.5 a seguir com $p = 2$. Por último, mostramos no Lema 2.9 que o terceiro também se anula, o que finalmente mostra (2.20). \square

Lema 2.5. *Seja $p \geq 0$ e $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$, então quase certamente,*

$$\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i^p \phi\left(\frac{i}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} S_L(\eta_i^p) \phi\left(\frac{i}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{L}{N}\right).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \left[\frac{1}{2L+1} \sum_{j=i-L}^{i+L} \eta_j^p(s) \right] \phi\left(\frac{i}{N}\right) - \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \eta_i^p(s) \phi\left(\frac{i}{N}\right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} [\eta_{i+j}^p(s) - \eta_i^p(s)] \phi\left(\frac{i}{N}\right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \eta_i^p(s) [\phi\left(\frac{i-j}{N}\right) - \phi\left(\frac{i}{N}\right)] \right| \\
&\leq \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \eta_i^p(s) \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L |\phi\left(\frac{i-j}{N}\right) - \phi\left(\frac{i}{N}\right)|.
\end{aligned}$$

Usando a suavidade de ϕ , seja K de forma que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x - y|$, a expressão acima está limitada por

$$\sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \eta_i^p(s) \frac{2L+1}{2L+1} K \frac{L}{N}.$$

Deste modo,

$$\frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \eta_i^p(s) \phi\left(\frac{i}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} S_L(\eta_i^p) \phi\left(\frac{i}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \eta_i^p(s) \right) \mathcal{O}\left(\frac{L}{N}\right).$$

Além disso, usando o acoplamento básico (2.9), sabemos que $\frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} \eta_i^p(t)$ está limitado uniformemente quase certamente. \square

2.3.4.1 Estimativas de um e dois blocos

Lema 2.6 (Estimativa de um bloco). *Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}$ compacto,*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} |S_L(\eta_i^2(s)) - 2S_L^2(\eta_i(s))| ds > \delta \right\} = 0. \quad (2.23)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
P^N & \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} |S_L(\eta_i^2(s)) - 2S_L^2(\eta_i(s))| ds > \delta \right\} \\
& \leq \frac{1}{\delta} E^N \left[\int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} |S_L(\eta_i^2(s)) - 2S_L^2(\eta_i(s))| \right] \\
& = \frac{1}{\delta} T \bar{\mu}^N \{ |S_L(\eta^2) - 2S_L^2(\eta)| \},
\end{aligned}$$

onde $\eta^p = (\eta_i^p)_{i \in \mathbb{Z}}$ e a medida de probabilidade $\bar{\mu}^N$ é definida sobre Y como,

$$\bar{\mu}^N = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} \mu_t \circ \theta_i dt, \quad (2.24)$$

onde μ_t é a distribuição do processo no tempo t e $(\theta_i \eta)_j = \eta_{i+j}$. Note que como foi definida $\bar{\mu}^N$ é invariante por translações.

Esta mudança reduz nosso problema a provar,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \bar{\mu}^N \{ |S_L(\eta^2) - 2S_L^2(\eta)| \} = 0. \quad (2.25)$$

Considere $q = (q_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}}$, $p > 0$ e η uma configuração de bastões, usando o acoplamento (2.9),

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}^N(\eta > q) & = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} \mu_t(\eta_i > q_i) dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} \nu(\zeta_i > q_i) dt \\
& \leq \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} \frac{1}{q_i^p} \nu\{\zeta_i^p\} = \frac{1}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \Lambda} \frac{1}{q_i^p} p! C_0^p \rightarrow 0
\end{aligned} \quad (2.26)$$

quando $\|q\| \rightarrow \infty$. Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe q com norma suficientemente grande, tal que, $\bar{\mu}(\eta > q) < \varepsilon$. Esta cota, uniforme em N , garante que a sequência $\{\bar{\mu}^N\}$ é relativamente compacta. Assim, para provar (2.25) é suficiente mostrar que para $\{\mu_L\}$

uma coleção qualquer de pontos limites para de $\{\bar{\mu}^N\}$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mu_L \{|S_L(\eta^2) - 2S_L^2(\eta)|\} = 0. \quad (2.27)$$

Si aplicamos limite em $N \rightarrow \infty$ em (2.26), analogamente, μ_L é relativamente compacta.

Para provar (2.27) vamos a considerar $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ finito e denotamos por, $\eta_\Gamma = \{\eta_i : i \in \Gamma\}$. Além disso, considere $q \in [0, \infty)^\mathbb{Z}$, uma configuração fixa de bastões, para $i, j \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq u \leq q_i$, definimos como

$$q_k^{u,i,j} = \begin{cases} q_i - u, & \text{se } k = i, \\ q_{i+j} + u, & \text{se } k = i + j, \\ q_k, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (2.28)$$

Agora, precisamos primeiro supor que o perfil inicial $u_0 > 0$, ou seja, é estritamente positivo. Esta suposição garante que, para todo $K \subset \mathbb{Z}$, finito $\mu_0|_K \ll \nu|_K$; esta suposição vai ser removida depois na Subseção 2.3.7. Pela atratividade do processo $\mu_t(\eta_\Gamma \geq q) \leq \nu(\eta_\Gamma \geq q)$, para cada, $\Gamma \subset \mathbb{Z}$, assim $\mu_t|_K \ll \nu|_K$ e, por conseguinte, $\bar{\mu}^N \ll \nu$ e $\mu \ll \nu$, para $\mu \in \{\mu_L\}$.

Lema 2.7. *Se $\mu \in \{\mu_L\}$, então, para cada $\Gamma \subset \mathbb{Z}$, conjunto finito, $i, i+j \in \Gamma$, $q \in [0, \infty)^\mathbb{Z}$ e $0 \leq u \leq q_i$. Então,*

$$\mu(\eta_\Gamma \geq q) = \mu(\eta_\Gamma \geq q^{u,i,j}), \quad (2.29)$$

onde $q^{u,i,j}$ é definido em (2.28). Além disso, μ é intercambiável[‡].

Demonstração. Notemos que primeiro que para $\mu(\eta_\Gamma \geq q)$, onde Γ qualquer subconjunto finito de \mathbb{Z} , para $i, j \in \Gamma$, se são intercambiados os η em ditas posições, basta trocar q por $q^{q_i - q_j, i, j}$, se $q_i \geq q_j$, na expressão acima. Deste modo, só resta provar que se $i, j \in \Gamma$ e $0 \leq u \leq q_i$, $\mu(\eta_\Gamma \geq q) = \mu(\eta_\Gamma \geq q^{u,i,j})$.

[‡]Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias é *intercambiável* ou *permutável* se para qualquer permutação finita de índices, a sequência permutada tem a mesma distribuição conjunta que a sequência original

Assim,

$$\begin{aligned} |\mu(\eta_\Gamma \geq q) - \mu(\eta_\Gamma \geq q^{u,i,j})| &\leq \int |\mathbf{1}_{\{\eta_\Gamma \geq q\}}(\eta) - \mathbf{1}_{\{\eta_\Gamma \geq q^{u,i,j}\}}(\eta)| d\mu(\eta) \\ &= \int |\mathbf{1}_A(\eta) - \mathbf{1}_B(\eta)| d\mu(\eta) \\ &= \int \mathbf{1}_{A \Delta B}(\eta) d\mu(\eta) = \mu(A \Delta B), \end{aligned}$$

onde $A = \{\eta_\Gamma \geq q\}$ e $B = \{\eta_\Gamma \geq q^{u,i,j}\}$. Por outra parte, se $\nu(A \Delta B) = 0$, a integral acima sempre vai ser zero, então

$$|\mu(\eta; \eta_\Gamma \geq q) - \mu(\eta; \eta_\Gamma \geq q^{u,i,j})| = 0.$$

Para finalizar só falta provar que $\nu(A \Delta B) = 0$, mas

$$\nu[A \Delta B] = \nu[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \leq \nu[A \cap B^c] + \nu[A^c \cap B],$$

o primeiro termo da soma na direita, $\nu(\{\eta_\Gamma \geq q\} \cap \{\eta_\Gamma < q^{u,i,j}\}) = 0$, pois, o valor η_i não pode ser maior ou igual do que q_i e ao mesmo tempo menor do que $q_i - u$. Analogamente, acontece com η_{i+j} no segundo termo e $\nu(A^c \cap B) = 0$. \square

Corolário 2.8 (Corolário 3.11 em Ekhaus and Seppäläinen (1996)). *Seja $\mu \in \{\mu_L\}$ sob as hipóteses do Lema 2.7, então μ é uma mistura de distribuições i.i.d. exponenciais.*

Pelo Corolário acima seja $\mu = \int \nu_r d\rho(r)$, onde ν_r é produto de exponenciais i.i.d. com media r , logo

$$\begin{aligned} \nu_r\{|S_L(\eta^2) - 2S_L^2(\eta)|\} &\leq \nu_r\{|S_L(\eta^2) - 2r^2|\} + 2\nu_r\{|r^2 - S_L^2(\eta)|\} \\ &\leq [\nu_r\{|S_L(\eta^2) - 2r^2|^2\}]^{1/2} + 2[\nu_r\{|r + S_L(\eta)|^2\}]^{1/2} \cdot [\nu_r\{|r - S_L(\eta)|^2\}]^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Usando as seguintes propriedades das variáveis i.i.d. exponenciais

$$(i) \ E \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - EX_1 \right|^2 \right\} = \frac{1}{N} E \{|X_1 - EX_1|^2\};$$

$$(ii) E \left\{ |X^2 - E(X^2)|^2 \right\} = 20(EX)^4;$$

$$(iii) E \left\{ |X - EX|^2 \right\} = (EX)^2.$$

Desta forma, (2.30) está limitada por

$$\sqrt{20}(2L+1)^{-1/2}r^2 + 2(2L+1)^{-1/2}r^2 \leq C(2L+1)^{-1/2}r^2 = C(2L+1)^{-1/2}\nu_r\{\eta_i^2\}.$$

Portanto,

$$\mu\{|S_L(\eta^2) - 2S_L^2(\eta)|\} \leq \int C(2L+1)^{-1/2}\nu_r\{\eta_i^2\}d\rho(r) = C(2L+1)^{-1/2}\mu\{\eta_i^2\} \rightarrow 0$$

quando $L \rightarrow \infty$, pois $\mu\{\eta_i^2\} \leq 2K_\Lambda C_0^2$. □

Lema 2.9 (Estimativa de dois Blocos).

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left[\int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) |S_L^2(\eta_i(s)) - S_{N\varepsilon}^2(\eta_i(s))| ds > \delta \right] = 0. \quad (2.31)$$

Demonstração. Aplicando desigualdade de Chebyshev na probabilidade em (2.31)

$$\begin{aligned} & P^N \left[\int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) |S_L^2(\eta_i(s)) - S_{N\varepsilon}^2(\eta_i(s))| ds > \delta \right] \\ & \leq \frac{1}{\delta} \mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) |S_L^2(\eta_i(s)) - S_{N\varepsilon}^2(\eta_i(s))| ds \right\} \end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a esperança acima na direita está limitada por

$$\begin{aligned} & \left[\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi^2\left(\frac{i}{N}\right) |S_L(\eta_i(s)) + S_{N\varepsilon}(\eta_i(s))|^2 ds \right\} \right]^{1/2} \\ & \quad \times \left[\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi^2\left(\frac{i}{N}\right) |S_L(\eta_i(s)) - S_{N\varepsilon}(\eta_i(s))|^2 ds \right\} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Usando a desigualdade $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, o primeiro fator em (2.32), está limitado por

$$\left[\frac{2T\|\phi\|_\infty^2}{N} \sum_{\frac{i}{N} \in \text{Sp } \phi} (\nu\{S_L^2(\zeta_i)\} + \nu\{S_{N\varepsilon}^2(\zeta_i)\}) \right]^{1/2} \leq \sqrt{8TK_\phi}\|\phi\|_\infty C_0,$$

onde ν é tal que os bastões são exponenciais i.i.d. com media C_0 , como no acoplamento (2.9) e K_ϕ tal que $\text{Sp } \phi \subset \left[-\frac{K_\phi}{2}, \frac{K_\phi}{2}\right]$.

Por outro lado, para provar que a esperança no segundo fator em (2.32) vai para zero, vamos a somar e subtrair o termo

$$\frac{1}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} \phi\left(\frac{j}{N}\right) S_L(\eta_j(s)),$$

deste modo, o quadrado do segundo fator em (2.32) está limitado por

$$\begin{aligned} & 2\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \phi\left(\frac{i}{N}\right) S_L(\eta_i(s)) - \frac{1}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} \phi\left(\frac{j}{N}\right) S_L(\eta_j(s)) \right|^2 ds \right\} \\ & + 2\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} \phi\left(\frac{j}{N}\right) S_L(\eta_j(s)) - \phi\left(\frac{i}{N}\right) S_{N\varepsilon}(\eta_i(s)) \right|^2 ds \right\}. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Observe que pela suavidade de ϕ e $|i - j| \leq N\varepsilon$, temos, $|\phi(\frac{i}{N}) - \phi(\frac{j}{N})| \leq \gamma = \gamma(\varepsilon)$, onde $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{i}{N}\right) S_{N\varepsilon}(\eta_i(s)) - \frac{1}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} \phi\left(\frac{j}{N}\right) \eta_j(s) &= \frac{1}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} [\phi\left(\frac{i}{N}\right) - \phi\left(\frac{j}{N}\right)] (\eta_i(s)) \\ &\leq \frac{1}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} \gamma(\varepsilon) (\eta_i(s)) \\ &= S_{N\varepsilon}(\eta_i(s)) \gamma. \end{aligned}$$

Assim, somando e subtraindo $\frac{1}{2N\varepsilon+1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} \phi(\frac{j}{N})\eta_j(s)$ no segundo termo de (2.33), está limitado por,

$$2\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i\pm j}{N} i \in \text{Sp } \phi} \left| \frac{1}{2N\varepsilon+1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} [\phi(\frac{j}{N})S_L(\eta_j(s)) - \phi(\frac{j}{N})\eta_j(s)] - S_{N\varepsilon}(\eta_i(s))\gamma \right|^2 ds \right\}.$$

Que está limitado por,

$$4\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i\pm j}{N} i \in \text{Sp } \phi} \left| \frac{1}{2N\varepsilon+1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} [\phi(\frac{j}{N})S_L(\eta_j(s)) - \phi(\frac{j}{N})\eta_j(s)] \right|^2 ds \right\} + 4\gamma^2\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i\pm j}{N} i \in \text{Sp } \phi} |S_{N\varepsilon}(\eta_i(s))|^2 ds \right\}.$$

A expressão dentro do valor absoluto no primeiro termo é da ordem LN^{-1} pelo Lema 2.5, portanto, dito termo vai para zero quando $N \rightarrow \infty$. Por outro lado, o segundo termo está limitado por $4\gamma^2TK_\phi C_0^2$, que vai para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pois $\gamma = \gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Analogamente, o primeiro termo em (2.33) está limitado por

$$4\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i\pm j}{N} i \in \text{Sp } \phi} \left| \frac{1}{2N\varepsilon+1} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} [\phi(\frac{j}{N})S_L(\eta_i(s)) - \phi(\frac{j}{N})S_L(\eta_j(s))] \right|^2 ds \right\} + 4\gamma^2\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i\pm j}{N} i \in \text{Sp } \phi} |S_L(\eta_i(s))|^2 ds \right\},$$

onde o segundo termo vai para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e o primeiro está limitado por

$$4\mu \left\{ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i\pm j}{N} i \in \text{Sp } \phi} \frac{2N\varepsilon+1}{(2N\varepsilon+1)^2} \sum_{j=i-N\varepsilon}^{i+N\varepsilon} \phi^2(\frac{j}{N}) |S_L(\eta_i(s)) - S_L(\eta_j(s))|^2 ds \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i+j}{N} i \in \text{Sp } \phi} \frac{1}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=-N\varepsilon}^{N\varepsilon} \phi^2\left(\frac{i+j}{N}\right) \mu \left\{ |S_L(\eta_i(s)) - S_L(\eta_{i+j}(s))|^2 \right\} ds \\
&= \frac{4}{2N\varepsilon + 1} \sum_{j=-N\varepsilon}^{N\varepsilon} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i+j}{N} i \in \text{Sp } \phi} \phi^2\left(\frac{i+j}{N}\right) \mu \left\{ |S_L(\eta_i(s)) - S_L(\eta_{i+j}(s))|^2 \right\} ds \\
&\leq \frac{4\|\phi^2\|_\infty}{T} \sup_{|j| \leq N\varepsilon} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{\frac{i+j}{N} i \in \text{Sp } \phi} \mu \left\{ |S_L(\eta_i(s)) - S_L(\eta_{i+j}(s))|^2 \right\} ds.
\end{aligned}$$

Note que se $|j| \leq 2L$, termos de $S_L(\eta_i(s))$ e $S_L(\eta_{i+j}(s))$ vão a ser cortados na diferença $|S_L(\eta_i(s)) - S_L(\eta_{i+j}(s))|$, sendo esta menor o igual que a mesma diferença tomando j' , tal que, $|j| < |j'|$. Portanto, o supremo acima é atingido no conjunto $2L < |j| \leq N\varepsilon$. Escrevendo esta expressão em termos de $\bar{\mu}^N$, definida em (2.24), o problema se reduz a mostrar

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{2L < |j| \leq N\varepsilon} \bar{\mu}^N \left\{ |S_L(\eta) - S_L(\theta_j \eta)|^2 \right\} = 0,$$

onde $(\theta_j \eta)_i = \eta_{i+j}$.

Note que, pela invariância sob translações de $\bar{\mu}^N$, é equivalente tomar Γ_L e Γ'_L dois intervalos arbitrários disjuntos de \mathbb{Z} de tamanho $2L + 1$ a uma distância não maior que $N\varepsilon$ e considerar

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \bar{\mu}^N \left\{ |S_{\Gamma_L}(\eta) - S_{\Gamma'_L}(\eta)|^2 \right\} = 0,$$

Analogamente à prova do Lema 2.7, considere $\mu \in \{\mu_L\}$ ponto limite de $\bar{\mu}^N$ e definamos $\Gamma = \Gamma_L \cup \Gamma'_L$ e $q = (q_i : i \in \Gamma)$ uma configuração fixa de bastões. Seguindo o mesmo procedimento, teremos que para todo $i, i+j \in \Gamma$ e $0 \leq u \leq q_i$,

$$\mu(\eta \geq q) = \mu(\eta \geq q^{u,i,j}). \quad (2.29a)$$

Porem não é possível aplicar o Corolário 2.8 diretamente pois não podemos garantir intercambiabilidade infinita sob μ .

Considere $K \ll L$ e dividimos o conjunto Γ_L na união disjunta $\Gamma_K^1 \cup \Gamma_K^2 \cup \dots \cup \Gamma_K^m$, onde os Γ_K^i , em analogia com Γ_L , são intervalos de aproximadamente $2K + 1$ elementos.

Assim,

$$\begin{aligned}
S_{\Gamma_L}(\eta) &= \frac{1}{2L+1} \sum_{j \in \Gamma_L} \eta_j = \frac{1}{2L+1} \left[\sum_{j \in \Gamma_K^1} \eta_j + \cdots + \sum_{j \in \Gamma_K^m} \eta_j \right] \\
&= \frac{2K+1}{2L+1} \left[\frac{1}{2K+1} \sum_{j \in \Gamma_K^1} \eta_j + \cdots + \frac{1}{2K+1} \sum_{j \in \Gamma_K^m} \eta_j \right] \\
&= \frac{2K+1}{2L+1} \left[S_{\Gamma_K^1}(\eta) + \cdots + S_{\Gamma_K^m}(\eta) \right].
\end{aligned}$$

Analogamente, é feita a construção dos Γ_K^i para Γ'_L , portanto,

$$\begin{aligned}
|S_{\Gamma_L}(\eta) - S_{\Gamma'_L}(\eta)|^2 &= \left| \frac{2K+1}{2L+1} \sum_{k=1}^m \left[S_{\Gamma_K^k}(\eta) - S_{\Gamma'_K^k}(\eta) \right] \right|^2 \\
&\leq \frac{(2K+1)^2}{(2L+1)^2} m \sum_{k=1}^m \left| S_{\Gamma_K^k}(\eta) - S_{\Gamma'_K^k}(\eta) \right|^2 \\
&\sim \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left| S_{\Gamma_K^k}(\eta) - S_{\Gamma'_K^k}(\eta) \right|^2,
\end{aligned}$$

quando $L \rightarrow \infty$, pois $2L+1 = (2K+1)m$.

Desta forma, para obter o resultado do Lema é suficiente mostrar,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu \left\{ \left| S_{\Gamma_K^k}(\eta) - S_{\Gamma'_K^k}(\eta) \right|^2 \right\} = 0.$$

Pela intercambiabilidade finita é suficiente mostrar

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{L \rightarrow \infty} \mu \left\{ \left| S_{\Gamma_K}(\eta) - S_{\Gamma'_K}(\eta) \right|^2 \right\} = 0.$$

Tomando $L \rightarrow \infty$, teremos intercambiabilidade infinita sob cada ponto limite μ_K e portanto, lhe podemos aplicar o Corolário 2.8. Então, μ_K é uma mistura de exponenciais i.i.d.

Seja ν_r produto de exponenciais i.i.d. com media r tal que $\mu_K = \int \nu_r dQ(r)$. Assim

$$\begin{aligned} \nu_r \left\{ |S_{\Gamma_K}(\eta) - S_{\Gamma'_K}(\eta)|^2 \right\} &\leq 2\nu_r \left\{ |S_{\Gamma_K}(\eta) - r|^2 \right\} + 2\nu_r \left\{ |S_{\Gamma'_K}(\eta) - r|^2 \right\} \\ &= \frac{4}{2K+1} \nu_r \left\{ |\eta - r|^2 \right\} \leq \frac{4\nu_r \{ \eta^2 \}}{2K+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mu_K \left\{ |S_{\Gamma_K}(\eta) - S_{\Gamma'_K}(\eta)|^2 \right\} \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{4\mu_K \{ \eta^2 \}}{2K+1} \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{8K_\phi C_0^2}{2K+1} = 0,$$

que finalmente prova o Lema. □

2.3.5 Distribuição dos Pontos limites

Para mostrar que os pontos limites são absolutamente contínuos com respeito a Lebesgue vai ser adaptada da prova do Lema 3.5 em Ekhaus and Seppäläinen (1996). Em particular vai ser necessário utilizar uma aproximação da medida empírica sobre conjuntos compactos de maneira consistente. Obtida a derivada de Radon–Nikodym da aproximação é utilizada convergência monótona para chegar na derivada procurada.

Lema 2.10. *As trajetórias α_t sob \mathcal{P} , ponto limite de $\{P^N\}$, são absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue $\mathcal{P} \otimes dt$ -quase certamente.*

Demonstração. Seja $M > 0$ e $\psi \geq 0$ continua e limitada sobre \mathbb{R} , definamos

$$\alpha_t^{N,M} \{ \psi \} = \frac{1}{N} \sum_{|i| \leq NM} \psi\left(\frac{i}{N}\right) \eta_i(t).$$

Dado p inteiro positivo, e ν é a medida onde os bastões ξ_i são exponenciais i.i.d. com media C_0 , como no acoplamento (2.9),

$$\begin{aligned} \int_0^T E^N [(\alpha_t^{N,M} \{\psi\})^p] dt &= \frac{1}{N^p} \sum_{-M \leq i_1, \dots, i_p \leq M} \psi\left(\frac{i_1}{N}\right) \cdots \psi\left(\frac{i_p}{N}\right) \int_0^T E^N [\eta_{i_1}(t) \cdots \eta_{i_p}(t)] dt \\ &\leq \frac{T}{N^p} \sum_{-M \leq i_1, \dots, i_p \leq M} \psi\left(\frac{i_1}{N}\right) \cdots \psi\left(\frac{i_p}{N}\right) \nu[\zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_p}] \\ &\leq \frac{TC_0^p}{N^p} \sum_{-M \leq i_1, \dots, i_p \leq M} \psi\left(\frac{i_1}{N}\right) \cdots \psi\left(\frac{i_p}{N}\right) = TC_0^p \left[\frac{1}{N} \sum_{|i| \leq M} \psi\left(\frac{i}{N}\right) \right]^p \end{aligned}$$

Tomando limite quando $N \rightarrow \infty$ para cada p ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int (\alpha_t^M \{\psi\})^p d\mathcal{P} dt \leq C_0^p \left(\int_{-M}^M \psi(x) dx \right)^p. \quad (2.34)$$

Para concluir a prova so resta aplicar o Lema 2.11 a seguir e temos o resultado enunciado. \square

Lema 2.11. *Sejam $\mathcal{D} = D([0, T], \mathcal{M}) \times [0, T]$, λ a medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} e $\kappa = \mathcal{P} \otimes T^{-1} dt$ sobre \mathcal{D} . Seja $y = (\alpha, t) \in \mathcal{D}$ e defina $y \mapsto \alpha_t$ uma função de \mathcal{D} no espaço das medidas positivas de Borel em \mathbb{R} . Suponha que para cada M , $0 < p < \infty$ e ψ continua e limitada, é satisfeita a desigualdade (2.34). Então $\alpha_t \ll \lambda$, κ -quase certamente.*

Dado que a desigualdade (2.34) é válida para conjuntos compactos de \mathbb{R} e para a família de medidas $\alpha_{\cdot}^{N,M}$, definida no começo da prova, precisamos de fazer uma aproximação para a medida empírica α_{\cdot}^N de nosso interesse. Com tal fim, provamos o seguinte resultado que garante a consistência na aproximação de α_{\cdot}^N por $\alpha_{\cdot}^{N,M}$ e de seus pontos limites.

Lema 2.12. *A sequência $\alpha_{\cdot}^{N,M}$ é relativamente compacta em $D([0, \infty), \mathcal{M})$. Além disso, se α_{\cdot}^M é ponto limite quando $N \rightarrow \infty$, então, para cada ψ continua e limitada,*

$$\alpha_{\cdot}^M \{\psi\} = \alpha_{\cdot}^M \{\psi \mathbb{1}_{[-M, M]}\} = \alpha_{\cdot} \{\psi \mathbb{1}_{[-M, M]}\},$$

onde α_{\cdot} é ponto limite da sequência α_{\cdot}^N .

Demonstração do Lema 2.12. Para cada ϕ continua de suporte compacto, existe M grande o suficiente para que $\text{Sp } \phi \subset [-M, M]$, desta forma

$$\alpha_t^{N,M} \{\phi\} = \alpha_t^N \{\phi\},$$

portanto,

$$P(\alpha^{N,M} \{\phi\} > K_\varepsilon) = P(\alpha^N \{\phi\} > K_\varepsilon) < \varepsilon,$$

pois $\alpha_t^N \{\phi\}$ é rígida e pelo Teorema de Prohorov (ver Billingsley (1999)) é relativamente compacta. Além disso, se $\alpha_t^M \{\phi\}$ ponto limite, quando $N \rightarrow \infty$, $\alpha_t^M \{\phi\} = \alpha_t \{\phi\}$. Portanto, pela Proposição 4.1.7 em Kipnis and Landim (1999) a família $\alpha^{N,M}$ é rígida em $D([0, T], \mathcal{M})$.

Considere ψ continua e limitada e $\delta > 0$, logo, existe ϕ_M continua de suporte contido em $[-M, M]$ tal que $|\phi_M(x) - (\psi \mathbb{1}_{[-M, M]})(x)| < \delta/M$, uniformemente em $x \in [-M, M]$. Usando a desigualdade de Chebyshev,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left\{ \left| \alpha_t^M \{\psi\} - \alpha_t \{\phi_M\} \right| > \varepsilon \right\} &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \left| \alpha_t^{N,M} \{\psi\} - \alpha_t^N \{\phi_M\} \right| > \varepsilon \right\} \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\varepsilon} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| (\psi \mathbb{1}_{[-M, M]})(\frac{i}{N}) - \phi_M(\frac{i}{N}) \right| E\eta_i(t) \\ &< \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{2MNC_0}{N\varepsilon} \frac{\delta}{M} \leq \frac{2C_0}{\varepsilon} \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Desta forma podemos escrever $\alpha_t^M \{\psi\}$ como $\alpha_t \{\psi \mathbb{1}_{[-M, M]}\}$. □

Demonstração do Lema 2.11. Considere \mathcal{B}_k uma sequência crescente de partições finitas que geram $\mathcal{B}_M = \mathcal{B}_{[-M, M]}$ a σ -álgebra de Borel de $[-M, M]$. Tomando $\psi = \mathbb{1}_A$ para $A \in \cup_k \mathcal{B}_k$ na desigualdade (2.34) vemos $\alpha_t \ll \lambda$ em cada \mathcal{B}_k , $\mathcal{P} \otimes T^{-1} dt$ -quase certamente, onde λ é a medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} . Seja

$$u_k(t, x) = \sum_{\substack{A: A \in \mathcal{B}_k \\ \lambda(A) > 0}} \mathbb{1}_A(x) \frac{\alpha_t(A)}{\lambda(A)}.$$

Observação. Note que para cada $A_M \in \mathcal{B}_M$, $A_M = A \cap [-M, M]$, para algum $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Além disso, $\alpha_t^M(A_M) = \alpha_t(A_M)$. Por conveniência tomamos $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_k^M$ tal que para todo k e $M \leq Q$, $\mathcal{B}_k^M \subset \mathcal{B}_k^Q$.

Dado $A_k \in \mathcal{B}_k$,

$$\int_{A_k} u_k(t, x) d\lambda(x) = \int \mathbf{1}_{A_k}(x) \frac{\alpha_t(A_k)}{\lambda(A_k)} d\lambda(x) = \alpha_t(A_k),$$

$$\text{logo, } u_k^y = \left. \frac{d\alpha_t}{d\lambda} \right|_{\mathcal{B}_k} \text{ e portanto, } u_k = \left. \frac{d(\alpha_t \otimes \kappa)}{d(\lambda \otimes \kappa)} \right|_{\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_{\mathcal{D}}}.$$

Sob a medida $\lambda \otimes \kappa$, u_k é um martingal não negativo com respeito à σ -álgebra $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$, visto que, para cada $A \in \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$

$$\int_A u_{k+1} d(\lambda \otimes \kappa) = \int_A u_k d(\lambda \otimes \kappa),$$

pois $A \in \mathcal{B}_{k+1} \times \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$. Desta forma, existe $\bar{u}(t, x)$ que é o limite $\lambda \otimes \kappa$ -quase certo de $u_k(t, x)$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, se u_k for uniformemente $\lambda \otimes \kappa$ -integrável $u_k \rightarrow \bar{u}$ em $L^1(\lambda \otimes \kappa)$, portanto, para cada $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$, $A_M = A \cap ([-M, M] \times \mathcal{D}) \in \mathcal{B}_M \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$, teremos

$$\alpha_t \otimes \kappa(A_M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_M} u_k d(\lambda \otimes \kappa) = \int_{A_M} \bar{u} d(\lambda \otimes \kappa).$$

Aplicando em ambos membros o Teorema da Convergência Monótona quando $M \rightarrow \infty$, obtemos

$$\alpha_t \otimes \kappa(A) = \int_A \bar{u} d(\lambda \otimes \kappa).$$

Note que para cada M a filtração $\{\mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{D}}\}$ gera $\mathcal{B}_M \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$, assim como a união em M gera $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ que coincide com $\mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \mathcal{D}}$ pela numerabilidade dos espaços. Como $\alpha_t \otimes \kappa$ e $\lambda \otimes \kappa$ têm segunda marginal comum $\kappa = \mathcal{P} \otimes T^{-1} dt$, $\alpha_t \ll \lambda$, $\mathcal{P} \otimes T^{-1} dt$ -quase certamente, com $u = \frac{d\alpha_t}{d\lambda}$.

Para completar a prova, resta mostrar que u_k é uniformemente $\lambda \otimes \kappa$ -integrável, assim, seja $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \iint u_k^p d\lambda d\kappa &= \iint \sum_{\substack{A:A \in \mathcal{B}_k \\ \lambda(A) > 0}} \mathbb{1}_A(x) \frac{\alpha_t(A)^p}{\lambda(A)^p} d\lambda(x) d\kappa(y) = \sum_{\substack{A:A \in \mathcal{B}_k \\ \lambda(A) > 0}} \frac{1}{\lambda(A)^{p-1}} \int \alpha_t(A)^p d\kappa \\ &\leq C_0^p \sum_{\substack{A:A \in \mathcal{B}_k \\ \lambda(A) > 0}} \frac{\lambda(A)^p}{\lambda(A)^{p-1}} = C_0^p \sum_{\substack{A:A \in \mathcal{B}_k \\ \lambda(A) > 0}} \lambda(A) \leq C_0^p \end{aligned} \quad (2.35)$$

pela desigualdade (2.34) □

Corolário 2.13. *Note que da desigualdade (2.35), decorre que a densidade $u(t, x) = \frac{d\alpha_t}{dx}(x)$ pertence a $L_{loc}^p(\mathbb{R} \times \mathcal{P} \times [0, T])$ quase certamente, isto é,*

$$E \int_0^T \int_K u^p(t, x) dx dt < \infty,$$

para cada $K \subset \mathbb{R}$ compacto.

2.3.6 Unicidade

Como foi mostrado anteriormente, os pontos limites \mathcal{P} estão concentrados em trajetórias absolutamente contínuas com respeito Lebesgue com densidade $u(\cdot, x)$ que satisfaz a forma fraca da equação diferencial. Para concluir a convergência em distribuição, e portanto em probabilidade, da sequência estudada só resta analisar a unicidade da solução fraca da equação diferencial.

Como foi discutido na subseção 2.1.1, nos trabalhos de Dahlberg and Kenig (1984) e Andreucci and DiBenedetto (1992), foi mostrada a existência e unicidade da solução fraca (ou generalizada) da equação (2.11) com condições que incluem nosso dado inicial. Portanto podemos concluir a primeira parte do Teorema 2.1, a qual se refere ao caso de média zero. Porém, no caso da equação (2.12) é bem conhecido que não há unicidade da solução. Nesse caso, é preciso mostrar que a solução que está sendo aproximada satisfaz

a condição de entropia (3.2), que fornece unicidade da solução fraca, como demonstrado por Kružkov (1970).

Para mostrar a segunda parte do Teorema 2.1, vamos a seguir outra metodologia baseada em aproximação por Medidas de Young como no trabalho de DiPerna (1985). Por sua diferença metodológica, iremos desenvolvê-la de forma independente no próximo capítulo. Como foi comentado no início desta seção, usaremos alguns resultados obtidos aqui.

2.3.7 Extensão ao caso $u_0 \geq 0$

Nosso objetivo agora é remover a suposição feita durante a demonstração de que u_0 seja estritamente positiva. Para isso, vamos aproximar o caso mais geral $u_0 \geq 0$ usando o resultado já obtido. Isto é, dada $u_0 \geq 0$ dado inicial em $L^\infty(\mathbb{R})$ definamos $u_0^\varepsilon = u_0 + \varepsilon$, deste modo, $u_0^\varepsilon \geq \varepsilon > 0$ e teremos uma distribuição inicial μ_0^ε onde os η_i^ε vão a ser exponenciais independentes tais que, $\mu_0^\varepsilon\{\eta_i\} = \mu_0\{\eta_i\} + \varepsilon$.

Para fazer a aproximação, é construído um acoplamento básico, como no começo do capítulo, entre as duas configurações. Seja $P^{N,\varepsilon}$ a distribuição conjunta com marginais processos de bastões com distribuições iniciais μ_0 e μ_0^ε respectivamente, de forma que $P^{N,\varepsilon}\{(\eta(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)) : \eta(\cdot) \leq \eta^\varepsilon(\cdot)\}$, pois $\eta(0) \leq \eta^\varepsilon(0)$ e pela atratividade do processo a desigualdade é mantida quase certamente.

2.3.7.1 Gerador para o acoplamento básico

Consideremos o processo acoplado definido no mesmo espaço de probabilidade, de forma que as correspondente marginares são Processos de Bastões que evoluem pelos mesmos pontos de Poisson $\{\mathcal{P}_i\}$. Para cada $f : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ cilíndrica limitada e contínua,

o gerador de este processo é definido como,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{L}}f(\eta, \xi) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i \vee \xi_i} [f(\eta^{u,i,i+j}, \xi^{u,i,i+j}) - f(\eta, \xi)] du \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i \wedge \xi_i} [f(\eta^{u,i,i+j}, \xi^{u,i,i+j}) - f(\eta, \xi)] du \\
&\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{(\eta_i - \xi_i)^+} [f(\eta^{u,i,i+j}, \xi) - f(\eta, \xi)] du \\
&\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{(\xi_i - \eta_i)^+} [f(\eta, \xi^{u,i,i+j}) - f(\eta, \xi)] du
\end{aligned} \tag{2.36}$$

onde, neste caso por conveniência, definimos diferente ao capítulo anterior, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\eta_k^{u,i,i+j} = \begin{cases} \min\{\eta_i, u\} & \text{se } k = i, \\ \eta_{i+j} + (\eta_i - u)^+ & \text{se } k = i + j, \\ \eta_k & \text{outro caso.} \end{cases} \tag{2.37}$$

Lema 2.14. *Seja $f(\eta, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k - \xi_k|$, então, $\bar{\mathcal{L}}f(\eta, \xi) \leq 0$.*

Demonstração. Consideremos o primeiro termo na direita de (2.36), deste modo

$$\begin{aligned}
&\sum_i \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i \wedge \xi_i} [|\eta_k^{u,i,i+j} - \xi_k^{u,i,i+j}| - |\eta_k - \xi_k|] du \\
&= \int_0^{\eta_k \wedge \xi_k} [|\mu - \mu| - |\eta_k - \xi_k|] du \\
&\quad + \sum_{j=k-R}^{k+R} p(k-j) \int_0^{\eta_j \wedge \xi_j} [|\eta_k + \eta_j - \mu - \xi_k - \xi_j + \mu| - |\eta_k - \xi_k|] du \\
&= -(\eta_k \wedge \xi_k) |\eta_k - \xi_k| + \sum_{j=k-R}^{k+R} p(k-j)(\eta_j \wedge \xi_j) [|\eta_k + \eta_j - \xi_k - \xi_j| - |\eta_k - \xi_k|] \\
&\leq -(\eta_k \wedge \xi_k) |\eta_k - \xi_k| + \sum_{j=k-R}^{k+R} p(k-j)(\eta_j \wedge \xi_j) [|\eta_k - \xi_k| + |\eta_j - \xi_j| - |\eta_k - \xi_k|] \\
&\leq -(\eta_k \wedge \xi_k) |\eta_k - \xi_k| + \sum_{j=k-R}^{k+R} p(k-j)(\eta_j \wedge \xi_j) |\eta_j - \xi_j|.
\end{aligned}$$

Somando este resultado em k , teremos $2R + 1$ termos da forma $p(k - j)(\eta_j \wedge \xi_j) |\eta_j - \xi_j|$, com $k = j - R, \dots, j + R$, portanto

$$\sum_k \sum_{j=k-R}^{k+R} p(k - j)(\eta_j \wedge \xi_j) |\eta_j - \xi_j| = \sum_k (\eta_k \wedge \xi_k) |\eta_k - \xi_k|,$$

que simplifica o primeiro termo na direita acima sendo a soma em k menor ou igual que zero.

Supondo que $\eta_k \leq \xi_k$, tomemos agora o segundo termo em (2.36),

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{(\eta_i - \xi_i)^+} [|\eta_k^{u, i, i+j} - \xi_k^{u, i, i+j}| - |\eta_k - \xi_k|] du \\ &= \int_0^{(\eta_k - \xi_k)^+} [(u + \xi_k) - \xi_k] - |\eta_k - \xi_k| du \\ & \quad + \sum_{j=k-R}^{k+R} p(k - j) \int_0^{(\eta_j - \xi_j)^+} [|\eta_k + (\eta_j - \xi_j - u) - \xi_k| - |\eta_k - \xi_k|] du \\ & \leq -\frac{(\eta_k - \xi_k)^2}{2} + \sum_{j=k-R}^{k+R} p(k - j) \frac{[(\eta_j - \xi_j)^+]^2}{2}. \end{aligned}$$

Somando em k e seguindo o mesmo raciocínio anterior, teremos que dita soma também é não positiva.

Analogamente se supomos que $\xi_k \leq \eta_k$, o terceiro termo em (2.36) é também não positivo. \square

Seja agora $Q^{N, \varepsilon}$ a distribuição conjunta sobre $D([0, \infty), \mathcal{M}) \times D([0, \infty), \mathcal{M})$ do processo

$$(\alpha^N, \alpha^{N, \varepsilon}) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i(\cdot) \delta_{\frac{i}{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i^\varepsilon(\cdot) \delta_{\frac{i}{N}} \right). \quad (2.38)$$

Note de que a rigidez de α^N decorre diretamente da rigidez de $\alpha^{N, \varepsilon}$, pois esta última domina a primeira devido ao acoplamento básico. Desta forma temos a rigidez conjunta do par (2.38). Denote por \mathcal{P} e \mathcal{P}^ε as distribuições marginais dos pontos limites. Como

foi demonstrado acima, \mathcal{P}^ε está concentrado em trajetórias absolutamente contínuas com respeito Lebesgue com densidade u^ε , que é a única solução fraca da equação (2.11).

Como o Lema 2.10 não depende da suposição $\mu_0 > 0$, temos então que \mathcal{P} também está concentrada em trajetórias absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue. Denotemos por v dita densidade, assim, só resta mostrar que v , de fato, é solução fraca da equação (2.11) porque coincide com o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ de u^ε .

Para todo $0 \leq a < b \leq T$ e $\phi \geq 0$ continua de suporte compacto, usando o Teorema de Pormanteu,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left\{ \int_a^b \int_{\mathbb{R}} \phi(x) [v(t, x) - u^\varepsilon(t, x)] dx dt \leq 0 \right\} \\ \geq \limsup_{N \rightarrow 0} P^N \left\{ \int_a^b [\alpha_t^N \{\phi\} - \alpha_t^{N, \varepsilon} \{\phi\}] dt \leq 0 \right\}, \end{aligned}$$

onde este último termo tem probabilidade total para todo N pelo acoplamento básico. Considerando todos os pares $a < b$ racionais e uma família completa numerável de ϕ , vemos que \mathcal{P} -quase certamente $u^\varepsilon(t, x) \geq v(t, x) \geq 0$. Além disso, podemos aplicar o mesmo raciocínio acoplando qualquer par de valores de ε e teremos que u^ε é decrescente em ε , portanto $u^\varepsilon(t, x) \searrow u(t, x) \geq v(t, x)$. Aplicando convergência dominada em

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) u^\varepsilon(t, x) dx - \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u_0^\varepsilon(x) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} A_2 \phi(x) [u^\varepsilon(s, x)]^2 dx ds$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos que u também é solução fraca da equação (2.11) com valor inicial u_0 .

Para completar a demonstração vamos verificar que, de fato, $u(t, x)$ coincide com $v(t, x)$ \mathcal{P} -quase certamente, seja $\delta > 0$ e ϕ contínua de suporte compacto em \mathbb{R} , como

$0 \leq v \leq u \leq u_\varepsilon$, deste modo, $0 \leq u(t, x) - v(t, x) \leq u_\varepsilon(t, x) - v(t, x)$, assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi(x)[u(t, x) - v(t, x)]dx > \delta \right\} &\leq \mathcal{P} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi(x)[u^\varepsilon(t, x) - v(t, x)]dx > \delta \right\} \\
&\leq \liminf_{N \rightarrow 0} P^N \left\{ \alpha_t^{N, \varepsilon} \{\phi\} - \alpha_t^N \{\phi\} > \delta \right\} \\
&\leq \liminf_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N\delta} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) E^N [\eta_i^\varepsilon(t) - \eta_i(t)] \\
&\leq \liminf_{N \rightarrow 0} \frac{\|\phi\|_\infty}{N\delta} \sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} E^N [\eta_i^\varepsilon(t) - \eta_i(t)],
\end{aligned} \tag{2.39}$$

onde K_ϕ é tal que $\text{Sp } \phi \in [-K_\phi, K_\phi]$.

Se denotamos por $f(\eta^\varepsilon, \eta) = \sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} |\eta_i^\varepsilon(t) - \eta_i(t)|$, usando a representação martingal

$$\sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} [\eta_i^\varepsilon(t) - \eta_i(t)] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [\eta_i^\varepsilon - \eta_i] + \int_0^t N^2 \bar{\mathcal{L}} \sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} |\eta_i^\varepsilon(s) - \eta_i(s)| ds,$$

como $\lim_{N \rightarrow \infty} N \bar{\mathcal{L}} \sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} |\eta_i^\varepsilon(s) - \eta_i(s)| \leq 0$, pelo Lema 2.14, a probabilidade na esquerda em (2.39) está limitada por

$$\begin{aligned}
\liminf_{N \rightarrow 0} \frac{\|\phi\|_\infty}{N\delta} \sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} E[\eta_i^\varepsilon - \eta_i] &= \liminf_{N \rightarrow 0} \frac{\|\phi\|_\infty}{N\delta} \sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} [\mu\{\eta_i\} + \varepsilon - \mu\{\eta_i\}] \\
&= \liminf_{N \rightarrow 0} \frac{\|\phi\|_\infty}{N\delta} \sum_{i=NK_\phi}^{NK_\phi} \varepsilon \leq \frac{2\|\phi\|_\infty K_\phi \varepsilon}{\delta},
\end{aligned}$$

que vai para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Fazendo $\delta \searrow 0$ em (2.39),

$$\mathcal{P} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi(x)[u(t, x) - v(t, x)]dx > 0 \right\} = 0$$

Portanto $u(t, x) = v(t, x)$, \mathcal{P} -quase certamente e podemos concluir que \mathcal{P} está concentrado na única trajetória absolutamente contínua com respeito Lebesgue com densidade $u(\cdot, x)$

□

Capítulo 3

Caso de média não nula

Como foi explicado anteriormente, o objetivo deste Capítulo é dar uma prova para a segunda parte do Teorema 2.1. Este caso precisa de um tratamento distinto ao caso simétrico principalmente pela ausência de unicidade na solução da lei de conservação (2.12). Seguindo os resultados de unicidade para este problema, é necessário mostrar que dita solução satisfaz uma condição de entropia (3.2), o que usando a teoria de soluções em valores de medidas de Young em DiPerna (1985) se obtém uma prova do resultado desejado. Esta metodologia foi apresentado por Rezakhanlou (1991) para os processos de *Exclusão* e *Zero Range* que usa fortemente sua propriedade de atratividade.

Visto que nosso processo também possui a propriedade de atratividade, usamos esta metodologia para dar a prova mas com a dificuldade adicional que precisamos de que o dado inicial seja estritamente positivo para usar a estimativa de um bloco (Lema 2.6). Usando a mesma ideia do Capítulo anterior, primeiramente supomos que temos esta hipóteses que vai ser removida no final por aproximação.

3.1 Leis de conservação

Neste capítulo estamos interessados no estudo do caso media não nula, segunda parte do Teorema 2.1, onde devemos chegar no modelo macroscópico dado pelo problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x(u^2(t, x)) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Como foi observado no Capítulo anterior, neste problema, de forma geral, a solução fraca não é única. Foram introduzidos critérios de admissibilidade que dão um sentido físico a solução e garante a sua unicidade. Neste trabalho consideramos que uma solução $u \in L^\infty$ para o problema de Cauchy (3.1) é dita *admissível* se, para cada $c \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \phi \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, uma função de suporte compacto sobre $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ continuamente diferenciável em ambas componentes,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \partial_t \phi(t, x) |u(t, x) - c| + \partial_x \phi(t, x) \operatorname{sgn}(u(t, x) - c) [u^2(t, x) - c^2] dx dt \geq 0. \quad (3.2)$$

Uma solução que satisfaz a condição (3.2) também é dita uma *solução entrópica*.

No trabalho de Kružkov (1970), $u \in L^\infty$ é dita uma *solução generalizada* do problema de Cauchy (3.1) se satisfaz a condição da entropia (3.2) e para cada B_r , bola de raio r , e $t \in [0, T]$ quase certamente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_r} |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0.$$

Além disso, Kružkov (1970) mostra a unicidade e estabilidade da solução generalizada.

Observação. Se é tomando $c = \pm \sup |u(t, x)|$ e ϕ constante com respeito ao tempo, uma solução generalizada é também uma solução fraca no sentido (2.6).

3.2 Soluções em valores de medidas de Young para Leis de Conservação

Um enfoque mais apropriado para nosso problema é a teoria de medidas soluções para as Leis de Conservação de DiPerna (1985), visto que, em geral, nossos pontos limites vivem no espaço das medidas de probabilidade sobre trajetórias em $D([0, \infty), \mathbb{R})$. A teoria de DiPerna (1985) nos permite concluir, sob certas condições, que as trajetórias soluções fracas desta equação (como uma solução no espaço das medidas, que vão ser definidas na Definição 3.1) são absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue. Para poder usar este resultado vai ser necessário definir uma transformação (Subseção 3.2.1) sobre a medida empírica, para satisfazer as condições de solução da equação, mas primeiro vamos fazer um breve esboço dos resultados de DiPerna (1985).

Definição 3.1. Seja $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, o espaço das medidas de probabilidade em \mathbb{R} . Dizemos que $v_{(t,x)} : (t, x) \mapsto v_{(t,x)} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é uma solução no espaço das medidas do problema de Cauchy (3.1), no sentido das distribuições se,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\partial_t \phi v_{(t,x)}\{\lambda\} + m \partial_x \phi v_{(t,x)}\{\lambda^2\}] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) u_0(x) dx = 0, \quad (3.3)$$

para cada $\phi \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Onde $v_{(t,x)}\{g(\lambda)\} = \int g(\lambda) dv_{(t,x)}(\lambda)$.

Desta mesma forma a condição de entropia (3.2) pode ser generalizada como: para cada $c \in \mathbb{R}$ e $\phi \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ não negativa,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \partial_t \phi v_{(t,x)}\{|\lambda - c|\} + m \partial_x \phi v_{(t,x)}\{\text{sgn}(\lambda - c)[\lambda^2 - c^2]\} dx dt \geq 0, \quad (3.4)$$

Observação. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m > 0$, pois note que se $m < 0$, podemos fazer uma simetria ao redor do zero no processo. Neste caso, fazendo a mudança $-u$ na equação teremos a nova equação $\partial_t u + (-m) \partial_x (u^2) = 0$, onde $-m > 0$ que é o caso estudado.

Em particular, uma solução fraca u pode ser vista como uma medida solução sendo $v_{(t,x)} = \delta_{u(t,x)}$, neste caso, $v_{(t,x)}\{g(\lambda)\} = \delta_{u(t,x)}\{g(\lambda)\} = g(u(t,x))$. Uma tal medida solução é dita uma *solução Dirac*, pois seu suporte está concentrado em $u(t,x)$. Note que o dado inicial em (3.3) está dado pela medida de probabilidade concentrada em $u_0(x)$, ou seja, $\delta_{u_0(x)}$. É de interesse para este trabalho as medidas soluções Dirac, isto é, que são absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue.

No trabalho de DiPerna (1985) é feita uma generalização do resultado de Kružkov (1970) para as medidas soluções

Theorem 3.1 (Teorema 4.2 em DiPerna (1985)). *Se $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ e $v_{(t,x)}$ uma medida solução admissível no sentido (3.4) com suporte uniformemente contido num intervalo compacto, então $v_{(t,x)}$ é uma solução de Dirac se,*

$$\int_{\mathbb{R}} v_{(t,x)}\{|\lambda|\} dx \leq \text{const.}$$

e

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{(t,x)}\{|\lambda - u_0(x)|\} dx dt = 0.$$

Observação. A solução Dirac dada pelo Teorema 3.1 é única, pois, em particular é uma solução generalizada no sentido de Kružkov (1970).

3.2.1 Medidas de Young

Para continuar com a prova da convergência devemos fazer uma transformação no martingal definido em (2.13) que permita chegar em medidas soluções e usar a teoria de DiPerna (1985). Com este objetivo, definimos a medida $\alpha^{N,L}$ como,

$$\alpha_t^{N,L}\{\phi, g\} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) g(S_L(\eta_i(t))),$$

para cada $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Usando o Lema 2.5 com $p = 1$,

$$\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \partial_x \phi\left(\frac{i}{N}\right) \eta_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \partial_x \phi\left(\frac{i}{N}\right) S_L(\eta_j(t)) + \mathcal{O}\left(\frac{L}{N}\right), \quad (3.5)$$

onde $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$. Juntando (3.5) com a estimativa de um bloco obtida no Lema 2.6, podemos escrever (2.13) como,

$$\begin{aligned} M_t^\phi &\approx \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) S_L(\eta_j(t)) - \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) S_L(\eta_j) - m \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \partial_x \phi\left(\frac{i}{N}\right) S_L^2(\eta_j(s)) ds \\ &= \alpha_t^{N,L} \{\phi, \lambda\} - \alpha_0^{N,L} \{\phi, \lambda\} - m \int_0^t \alpha_s^{N,L} \{\partial_x \phi, \lambda^2\} ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que define uma expressão fechada em $\alpha_t^{N,L}$.

Seja $Q^{N,L}$ a distribuição da família $\alpha_t^{N,L}$ em $D([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+))$ onde $\mathcal{M}(\cdot)$ denota o espaço das medidas finitas positivas de Borel.

3.2.1.1 Compacidade relativa de $\alpha_t^{N,L}$

Lema 3.2. *A família de medidas $\alpha_t^{N,L}$ é relativamente compacta em $D([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+))$.*

Demonstração. Como estamos interessados nos pontos limites da família de medidas probabilidades $Q^{N,L}$, quando $N \rightarrow \infty$ e depois $L \rightarrow \infty$, devemos estudar a rigidez desta. Neste espaço, $\alpha^{N,L}$ converge para α na topologia fraca em $L^\infty([0, T])$ se $\alpha^{N,L}\{F\}$ converge para $\alpha\{F\}$ para cada $F \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Esta topologia pode ser gerada tomando uma família densa $\{F_k; k \geq 1\} \subset C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ e a métrica

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha, \tilde{\alpha}) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{\|\alpha\{F_k\} - \tilde{\alpha}\{F_k\}\|_\infty}{1 + \|\alpha\{F_k\} - \tilde{\alpha}\{F_k\}\|_\infty}.$$

Como a bola em $L^\infty([0, T])$ é relativamente compacta na topologia fraca, teremos que o conjunto $\{\alpha : \|\alpha\{F_k\}\|_\infty \leq C_k \text{ para todo } k \geq 1\}$ é compacto na topologia fraca, para

cada C_k finito. Mas, para cada $k \geq 1$,

$$\sup_{N,L} Q^{N,L} \{ \|\alpha^{N,L}\{F_k\}\|_\infty \geq C_k \} \leq \sup_{N,L} \frac{1}{C_k} E^{Q^{N,L}} \|\alpha^{N,L}\{F_k\}\|_\infty \leq \frac{K_k \|F_k\|_\infty}{C_k},$$

onde K_k depende do suporte de F_k . Podemos tomar C_k suficientemente grande, de forma que $\frac{K_k \|F_k\|_\infty}{C_k} \leq \varepsilon$. Isto significa que $\alpha^{N,L}\{F_k\}$ é rígida para cada $k \geq 1$ em $D([0, T], \mathbb{R})$ e $\{F_k; k \geq 1\}$ uma família densa, portanto pela Proposição 4.1.7 em Kipnis and Landim (1999), a sequência $\alpha^{N,L}$ é rígida em $D([0, T], \mathcal{M}_+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+))$. \square

3.3 Distribuição dos pontos limites

Seja α um ponto limite da sequência $\alpha^{N,L}$ queremos comprovar que $\alpha_t(dx) = \alpha_t(x)dx$. Mas em nosso caso, se fixamos $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$,

$$\begin{aligned} \left| \alpha_t^{N,L}\{\phi(x), g(\lambda)\} \right| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) g(S_L(\eta_i(t))) \right| \leq \|g\|_\infty \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \phi\left(\frac{i}{N}\right) \right| \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \|g\|_\infty \int |\phi(x)| dx, \end{aligned}$$

pois ϕ é integrável.

Como o conjunto abaixo é fechado na topologia fraca de $L^\infty([0, T])$

$$\left\{ \alpha_t \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) : \sup_{0 \leq t \leq T} |\alpha_t\{\phi(x), g(\lambda)\}| \leq \|g\|_\infty \int |\phi(x)| dx \right\}$$

temos que para cada \mathcal{Q} , ponto limite da sequência $Q^{N,L}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\alpha_t\{\phi(x), g(\lambda)\}| \leq \|g\|_\infty \int |\phi(x)| dx \right] \\ \geq \limsup_{N \rightarrow \infty} Q^{N,L} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \alpha_t^{N,L}\{\phi(x), g(\lambda)\} \right| \leq \|g\|_\infty \int |\phi(x)| dx \right] = 1, \end{aligned}$$

que prova que se α_t é ponto limite de $\alpha_t^{N,L}$, então é absolutamente contínua respeito Lebesgue em seu primeiro argumento \mathcal{Q} -quase certamente, pois tomando ϕ como indicadora de A , vemos que se $dx(A) = 0$, então $\alpha_t^{N,L}\{\mathbb{1}_A, g\} = 0$.

Visto que, os pontos limites α satisfazem uma relação do tipo (3.6), podemos usar o Teorema 3.1 e o resultado de Kružkov (1970) para concluir que \mathcal{Q} está concentrada na única solução Dirac dada por estes resultados. Portanto, para chegar no resultado desejado, devemos comprovar que \mathcal{Q} está concentrada em trajetórias admissíveis, no sentido (3.4) que satisfazem as seguintes condições: seja $u_0 \in L_\infty \cap L_1$,

$$\sup_{t,x} \alpha_t(\mathbb{R} - [0, \lambda_0]) = 0, \quad (\text{a})$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \alpha_t\{|\lambda|\} dx < \infty, \quad (\text{b})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \alpha_t\{|\lambda - u_0(x)|\} dx = 0. \quad (\text{c})$$

Observação. Vamos supor primeiro, por motivos técnicos, que nosso dado inicial $u_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$, ou seja, duas vezes diferenciável que converge a zero no infinito e além disso supomos que u_0 e u_0' são integráveis. Esta condição, além de $u_0 > 0$, introduzida acima ao ser utilizado o Lema 2.6 na dedução de (3.6), vai ser removida depois na Seção 3.4 por meio de aproximação de forma similar a como foi feito no caso simétrico.

3.3.1 Desigualdades de entropia no nível microscópico

Nosso objetivo agora é mostrar que esta propriedade é passada aos pontos limites através de uma desigualdade análoga para o nível microscópico, Proposição 3.3 a seguir.

Proposição 3.3. *Para cada $\varepsilon > 0$, $\phi \in C_c^{1,1}((0, \infty) \times \mathbb{R})$ não negativa e todo $c \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} Q^{N,L} \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\partial_s \phi(s, \frac{i}{N}) |S_L(\eta_i(s)) - c| \right. \right. \\ \left. \left. + m \partial_x \phi(s, \frac{i}{N}) \operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - c) [S_L^2(\eta_i(s)) - c^2] \right] ds \geq -\varepsilon \right\} = 1. \quad (3.7)$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que $c > 0$ e seja (η, ξ) o acoplamento básico com marginais processos de bastões iniciando sob μ_0 e ν_c respectivamente, onde a segunda é definida como produto de exponenciais i.i.d. com media c .

Para provar esta desigualdade tomamos o martingal

$$M_t^\phi = f_{\phi_t}(\eta_t, \xi_t) - f_{\phi_t}(\eta_0, \xi_0) - \int_0^t (\partial_s + N\bar{\mathcal{L}})f_{\phi_t}(\eta_s, \xi_s)ds, \quad (3.8)$$

com $f_{\phi_t}(\eta, \xi) = \sum \phi(t, \frac{i}{N}) |\eta_i(t) - \xi_i(t)|$ e mostraremos que $M_t^\phi \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$ em probabilidade. Por outro lado, do membro direito de (3.8) obteremos os termos da desigualdade desejada.

Quando $c < 0$ consideramos o acoplamento básico $(\eta, -\xi')$ iniciando sob μ_0 e ν_{-c} respectivamente. Nesse caso, tomando $\xi = -\xi'$, consideramos o martingal (3.8) avaliado em $f_{\phi_t}(\eta, \xi) = \sum \phi(t, \frac{i}{N}) |\eta_i(t) - \xi_i(t)| = \sum \phi(t, \frac{i}{N}) |\eta_i(t) + \xi'_i(t)|$

Seja $\bar{\mathcal{L}}$ o gerador do acoplamento básico definido em (2.36), assim, o martingal M_t^ϕ pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} M_t^\phi &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(t, \frac{i}{N}) |\eta_i(t) - \xi_i(t)| - \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(0, \frac{i}{N}) |\eta_i - \xi_i| \\ &\quad - \int_0^t (\partial_s + N\bar{\mathcal{L}}) \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(s, \frac{i}{N}) |\eta_i(s) - \xi_i(s)| ds \end{aligned}$$

onde os dois primeiros termos na direita se anulam para t suficientemente grande, pois o suporte de ϕ é um compacto contido em $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, portanto, o martingal coincide com

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty (\partial_s + N\bar{\mathcal{L}}) \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(s, \frac{i}{N}) |\eta_i(s) - \xi_i(s)| ds \\ &= - \int_0^\infty \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\partial_s \phi(s, \frac{i}{N}) |\eta_i(s) - \xi_i(s)| + N\bar{\mathcal{L}}\phi(s, \frac{i}{N}) |\eta_i(s) - \xi_i(s)| \right] ds. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, vamos a considerar os termos na soma do gerador tais que $\eta_i \leq \xi_i$, assim,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R \int_0^{\eta_k \wedge \xi_k} [f(\eta^{u,k,k+j}, \xi^{u,k,k+j}) - f(\eta, \xi)] du = -\phi(s, \frac{i}{N}) \eta_i (\xi_i - \eta_i) \\ & + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i}{N}) (\eta_j \wedge \xi_j) [|\xi_i + \xi_j - \eta_i - \eta_j| - |\eta_i - \xi_i|] \\ & \leq -\phi(s, \frac{i}{N}) \eta_i (\xi_i - \eta_i) + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i}{N}) (\eta_j \wedge \xi_j) |\xi_j - \eta_j|, \end{aligned}$$

se somamos em i , o segundo termo acima,

$$\sum_i \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i}{N}) (\eta_j \wedge \xi_j) |\xi_j - \eta_j| = \sum_i \eta_i |\xi_i - \eta_i| \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i+j}{N}).$$

E a soma em i da expressão anterior está limitada por

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i+j}{N}) - \phi(s, \frac{i}{N}) \right] \eta_i |\xi_i - \eta_i|.$$

Por outra parte

$$\begin{aligned} & \int_0^{(\xi_i - \eta_i)^+} [f(\eta, \xi^{u,i,i+j}) - f(\eta, \xi)] du = \int_0^{(\xi_i - \eta_i)^+} \phi(s, \frac{i}{N}) (u - \xi_i + \eta_i) du \\ & + \int_0^{(\xi_j - \eta_j)^+} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i}{N}) (|\eta_i - \xi_i - \xi_j + u + \eta_j| - |\eta_i - \xi_i|) du \\ & \leq \int_0^{(\xi_i - \eta_i)^+} \phi(s, \frac{i}{N}) (u - \xi_i + \eta_i) du \\ & + \int_0^{(\xi_j - \eta_j)^+} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i}{N}) |-\xi_j + u + \eta_j| du, \end{aligned}$$

somando em i usando o mesmo raciocínio anterior, dita soma vai estar limitada por

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi(s, \frac{i+j}{N}) - \phi(s, \frac{i}{N}) \right] \frac{(\xi_i - \eta_i)^2}{2}.$$

Somando ambos resultados

$$\sum_j p(i-j) \left[\phi\left(s, \frac{i+j}{N}\right) - \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) \right] \frac{\xi_i^2 - \eta_i^2}{2}.$$

Analogamente para os termo tais que $\eta_i \geq \xi_i$, obtemos

$$\sum_j p(i-j) \left[\phi\left(s, \frac{i+j}{N}\right) - \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) \right] \frac{\eta_i^2 - \xi_i^2}{2}.$$

Juntando os resultados acima, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} -M_t^\phi \leq & \int_0^\infty \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\partial_s \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) |\eta_i(s) - \xi_i(s)| \right. \\ & \left. + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) N \left[\phi\left(s, \frac{i+j}{N}\right) - \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) \right] \operatorname{sgn}(\eta_i(s) - \xi_i(s)) \frac{\eta_i^2(s) - \xi_i^2(s)}{2} \right] ds, \end{aligned}$$

aproximando a derivada de ϕ por seu incremento obtemos,

$$\begin{aligned} -M_t^\phi \leq & \int_0^\infty \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\partial_s \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) |\eta_i(s) - \xi_i(s)| \right. \\ & \left. + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j)(i-j) \partial_x \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) \operatorname{sgn}(\eta_i(s) - \xi_i(s)) \frac{\eta_i^2(s) - \xi_i^2(s)}{2} \right] ds + \mathcal{O}(N^{-1}). \end{aligned}$$

Usando o desigualdade de Chebyshev,

$$\begin{aligned} Q^{N,L} \left[\int_0^\infty \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\partial_s \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) |\eta_i(s) - \xi_i(s)| \right. \right. \\ \left. \left. + m \partial_x \phi\left(s, \frac{i}{N}\right) \operatorname{sgn}(\eta_i(s) - \xi_i(s)) \frac{\eta_i^2(s) - \xi_i^2(s)}{2} \right] ds < -\varepsilon \right] \\ \leq Q^{N,L} [-M_t^\phi - \mathcal{O}(N^{-1}) < -\varepsilon] \leq Q^{N,L} [|M_t^\phi| + \mathcal{O}(N^{-1}) > \varepsilon] \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} E^{N,L} \left[|M_t^\phi| + \mathcal{O}(N^{-1}) \right], \end{aligned}$$

que vai para zero quando $N \rightarrow \infty$, pelo Lema 3.4.

O primeiro termo na integral pode ser substituído usando o Lema 2.5 por

$$\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \partial_s \phi(s, \frac{i}{N}) |S_L(\eta_i(s)) - S_L(\xi_i(s))|,$$

com um erro da ordem $\mathcal{O}(\frac{L}{N})$. Pela estimativa de um bloco (Lema 2.6) e novamente o Lema 2.5 o segundo termo pode ser substituído por

$$\partial_x \phi(s, \frac{i}{N}) \operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - S_L(\xi_i(s))) [S_L^2(\eta_i(s)) - S_L^2(\xi_i(s))],$$

assim,

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} Q^{N,L} \left[\int_0^\infty \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\partial_s \phi(s, \frac{i}{N}) |S_L(\eta_i(s)) - S_L(\xi_i(s))| \right. \right. \\ \left. \left. + m \partial_x \phi(s, \frac{i}{N}) \operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - S_L(\xi_i(s))) [S_L^2(\eta_i(s)) - S_L^2(\xi_i(s))] \right] ds < -\varepsilon \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como suposto inicialmente, o processo ξ começa com bastões i.i.d. com media c . Pela invariância do processo sob esta distribuição, teremos que para cada t , $\xi(t)$ é um produto de exponenciais i.i.d. com media c . Desta forma,

$$\begin{aligned} E \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \partial_x \phi(s, \frac{i}{N}) |S_L^2(\xi_i(s)) - c^2| &\leq T \|\phi\|_\infty K_\phi \nu_c |S_L^2(\xi_i) - c^2| \\ &\leq T \|\phi\|_\infty K_\phi \nu_c |S_L(\xi_i) + c| |S_L(\xi_i) - c| \end{aligned}$$

que vai para zero quando $L \rightarrow \infty$ pela lei dos grandes números. Igualmente,

$$E \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \partial_x \phi(s, \frac{i}{N}) |S_L(\xi_i(s)) - c| \leq T \|\phi\|_\infty K_\phi \nu_c |S_L(\xi_i) - c| \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Analogamente se pode seguir este raciocínio em $\operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - S_L(\xi_i(s)))$, pois ela é contínua com exceção do caso $S_L(\eta_i(s)) = S_L(\xi_i(s))$. Mas se isso acontece para um número infinito de valores de L , vamos chegar em $u = c$ que trivialmente satisfaz a desigualdade da entropia.

Somando e subtraindo c e c^2 no primeiro e segundo modulo em (3.9) respectivamente e aplicando desigualdade triangular, chegamos no resultado desejado. \square

Lema 3.4. *Seja M_t^ϕ como definido em (3.8), então,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(M_t^\phi)^2 = 0.$$

Demonstração. Vamos a considerar o martingal

$$N_t^\phi = (M_t^\phi)^2 - \int_0^t \left[N \tilde{\mathcal{L}} f^2(\eta(s), \xi(s)) - 2f(\eta(s), \xi(s)) N \tilde{\mathcal{L}} f(\eta(s), \xi(s)) \right] ds,$$

onde $f(\eta(s), \xi(s)) = N^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(\frac{i}{N}) |\eta_i(s) - \xi_i(s)|$. Alem disso,

$$\begin{aligned} N \tilde{\mathcal{L}} f^2 - 2f N \tilde{\mathcal{L}} f &= N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{\eta_i \wedge \xi_i} [f(\eta^{u, i, i+}, \xi^{u, i, i+}) - f(\eta, \xi)]^2 du \\ &\quad + N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{(\eta_i - \xi_i)^+} [f(\eta^{u, i, i+}, \xi) - f(\eta, \xi)]^2 du \\ &\quad + N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-R}^R p(j) \int_0^{(\xi_i - \eta_i)^+} [f(\eta, \xi^{u, i, i+}) - f(\eta, \xi)]^2 du. \end{aligned}$$

A integral no primeiro termo na direita pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^2} \left[\int_0^{\eta_i \wedge \xi_i} \phi^2\left(\frac{i}{N}\right) (-|\eta_i - \xi_i|)^2 du \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2\left(\frac{i}{N}\right) \int_0^{\eta_j \wedge \xi_j} [(|\eta_i - \eta_j - \xi_i - \xi_j| - |\eta_i - \xi_i|)]^2 du \right] \\ &\leq \frac{1}{N^2} \left[\int_0^{\eta_i \wedge \xi_i} \phi^2\left(\frac{i}{N}\right) (-|\eta_i - \xi_i|)^2 du + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2\left(\frac{i}{N}\right) \int_0^{\eta_j \wedge \xi_j} |\eta_j - \xi_j|^2 du \right], \end{aligned}$$

a soma em i desta expressão está limitada por

$$\frac{1}{N^2} \left[\sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2\left(\frac{i+j}{N}\right) - \phi^2\left(\frac{i}{N}\right) \right] (\eta_i \wedge \xi_i) |\eta_i - \xi_i|^2.$$

Também podemos escrever a integral no segundo termo como,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \left[\int_0^{(\eta_i - \xi_i)^+} [\phi(\frac{i}{N})(u - |\eta_i - \xi_i|)]^2 du \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2(\frac{i}{N}) \int_0^{(\eta_j - \xi_j)^+} (|\eta_i + \eta_j - \xi_j - u - \xi_i| - |\eta_i - \xi_i|)^2 du \right] \\ & \leq \frac{1}{N^2} \left[\phi^2(\frac{i}{N}) \int_0^{(\eta_i - \xi_i)^+} (u - |\eta_i - \xi_i|)^2 du \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2(\frac{i}{N}) \int_0^{(\eta_j - \xi_j)^+} |\eta_j - \xi_j - u|^2 du \right], \end{aligned}$$

sendo limitada ao somar em i por

$$\frac{1}{N^2} \left[\sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2(\frac{i+j}{N}) - \phi^2(\frac{i}{N}) \right] \frac{(\eta_i - \xi_i)^3}{3}.$$

Analogamente a integral no terceiro termo está limitada por

$$\frac{1}{N^2} \left[\sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2(\frac{i+j}{N}) - \phi^2(\frac{i}{N}) \right] \frac{(\xi_i - \eta_i)^3}{3}.$$

Juntando estes três resultados acima e o fato que o somatório em $i \in \mathbb{Z}$ tem uma quantidade de valores não nulos de ordem NK_ϕ , a esperança de η^k está limitada por C_0^k (devido ao acoplamento básico) e a esperança de ξ^k é $c^k/k!$, teremos

$$E[N\tilde{\mathcal{L}}f^2 - 2fN\tilde{\mathcal{L}}f] \leq 8K_\phi C_0^3 |c|^3 \left| \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \phi^2(\frac{i+j}{N}) - \phi^2(\frac{i}{N}) \right|,$$

que vai para zero quando $N \rightarrow \infty$, pela suavidade de ϕ .

Voltando a definição do martingal de media zero N_t^ϕ , temos

$$E(M_t^\phi)^2 = EN_t^\phi + E \int_0^t N\tilde{\mathcal{L}}f^2 - 2fN\tilde{\mathcal{L}}f ds = E \int_0^t N\tilde{\mathcal{L}}f^2 - 2fN\tilde{\mathcal{L}}f ds,$$

que prova o lema. □

3.3.2 Unicidade dos pontos limites

Agora, usando a Proposição 3.3, mostraremos que todo ponto limite \mathcal{Q} de $Q^{N,L}$ está concentrado em uma solução admissível no sentido (3.4). Para isso, primeiro observamos que o conjunto

$$\left\{ \alpha_t \in \mathcal{M}_+ : \int_0^T \alpha_s \{ \partial_s \phi(s, x) |S_L(\eta_i(s)) - c| \right. \\ \left. + m \alpha_s \{ \partial_x \phi(s, x) \operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - c) [S_L^2(\eta_i(s)) - c^2] \} ds \geq -\varepsilon \right\}$$

é fechado na topologia fraca de $L_\infty([0, T])$. Portanto, se \mathcal{Q} é um ponto limite da sequência $Q^{N,L}$, a expressão

$$\mathcal{Q} \left[\int_0^T \left[\alpha_s \{ \partial_s \phi(s, x) |S_L(\eta_i(s)) - c| \right. \right. \\ \left. \left. + m \alpha_s \{ \partial_x \phi(s, x) \operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - c) [S_L^2(\eta_i(s)) - c^2] \} \right] ds \geq -\varepsilon \right]$$

é sempre maior ou igual que

$$\limsup_{N,L \rightarrow \infty} Q^{N,L} \left[\int_0^T \left[\alpha_s^{N,L} \{ \partial_s \phi(s, x) |S_L(\eta_i(s)) - c| \right. \right. \\ \left. \left. + m \alpha_s^{N,L} \{ \partial_x \phi(s, x) \operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - c) [S_L^2(\eta_i(s)) - c^2] \} \right] ds \geq -\varepsilon \right] = 1,$$

onde este último limite se obtém da Proposição 3.3.

Fazendo agora $\varepsilon \rightarrow 0$ e usando a propriedade de continuidade absoluta dos pontos limites,

$$\mathcal{Q} \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\partial_s \phi(s, x) \alpha_s \{ |S_L(\eta_i(s)) - c| \right. \right. \\ \left. \left. + m \partial_x \phi(s, x) \alpha_s \{ \operatorname{sgn}(S_L(\eta_i(s)) - c) [S_L^2(\eta_i(s)) - c^2] \} \right] dx ds \geq 0 \right] = 1.$$

Agora para continuar com a prova da unicidade só resta mostrar as três condições dadas na página 71. Para provar (a), seja $C_0 < K < \infty$ e $\phi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[\int_0^T \alpha_t \{ \phi(x), \mathbb{1}_{\{|\lambda| > k\}} \} dt \right] &\leq \limsup_{N,L \rightarrow \infty} E^{N,L} \left[\int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{i}{N}\right) \mathbb{1}_{\{S_L(\eta_i(t)) > K\}} \right] \\ &\leq \lim_{L \rightarrow \infty} \|\phi\|_{\infty} K_{\phi} T \nu[S_L(\zeta_i) > K] = 0, \end{aligned}$$

pela lei forte dos grandes números, uniformemente em t e x .

A prova de (b), seja $0 < A < \infty$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \left[\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \alpha_t \{ |\lambda| \} dx > A \right] &\leq \limsup_{N,L \rightarrow \infty} Q^{N,L} \left[\sup_{t \geq 0} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} S_L(\eta_i(t)) > A \right] \\ &= \limsup_{N,L \rightarrow \infty} Q^{N,L} \left[\sup_{t \geq 0} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i(t) > A \right] \\ &= \limsup_{N,L \rightarrow \infty} Q^{N,L} \left[\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i > A \right], \end{aligned}$$

dado γ qualquer, podemos tomar N suficientemente grande, tal que,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx \right| \leq \gamma,$$

com probabilidade alta, portanto, o último termo acima à direita se anula quando $A > \|u_0\|_{L^1} + \gamma$.

Só resta mostrar (c). Pela condições (a), (b) e u_0 ser uniformemente limitado, podemos usar o teorema da convergência dominada, assim,

$$E^{\mathcal{Q}} \left[\limsup_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \alpha_t \{ \lambda - u_0(x) \} dx \right] = \limsup_{t \rightarrow 0} E^{\mathcal{Q}} \left[\int_{\mathbb{R}} \alpha_t \{ \lambda - u_0(x) \} dx \right],$$

por outro lado,

$$\lim_{t \rightarrow 0} E^{\mathcal{Q}} \left[\int_{\mathbb{R}} \alpha_t \{ |\lambda - u_0(x)| \} dx \right] \leq \lim_{t \rightarrow 0} \limsup_{N,L \rightarrow \infty} E^{N,L} \left[\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_L(\eta_i(t)) - u_0\left(\frac{i}{N}\right)| \right].$$

Seja (η, ξ^i, ξ^j) o acoplamento básico com marginais processos de bastões iniciando sob as medidas $\mu_0, \nu_{v(i)}$ e $\nu_{v(j)}$ respectivamente, onde $\nu_{v(i)}$ e $\nu_{v(j)}$ são produto de exponenciais i.i.d. com medias $v(i)$ e $v(j)$ respectivamente (v definido em (2.8)), de forma que $P^{(\xi^i, \xi^j)}(\xi^i \leq \xi^j \text{ ou } \xi^j \leq \xi^i) = 1$ e $P^{(\xi^i, \xi^j)}(\xi_i^i = \eta_i \text{ e } \xi_j^j = \eta_j) = 1$.

Somando e subtraindo $S_L(\xi_i^i)$ na esperança da direita acima,

$$E^{N,L} \left[\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_L(\eta_i(t)) - u_0(\frac{i}{N})| \right] \leq E^{N,L} \left[\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_L(\eta_i(t)) - S_L(\xi_i^i(t))| \right] \\ + E^{N,L} \left[\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_L(\xi_i^i(t)) - u_0(\frac{i}{N})| \right]$$

o segundo termo na direita acima vai para zero, pela lei dos grandes números quando N e depois L convergem para infinito. Agora, se sumamos e subtraímos $S_L(\xi_i^j(t)) - S_L(\xi_j^j(t))$ no primeiro termo na direita,

$$E^N \left[\frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_L(\eta_i(t)) - S_L(\xi_i^i(t))| \right] \leq \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L+1} \sum_{j=i-L}^{i+L} E^N |\eta_j(t) - \xi_j^i(t)| \\ \leq \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L+1} \sum_{j=i-L}^{i+L} E^N |\eta_j(t) - \xi_j^j(t)| \\ + \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L+1} \sum_{j=i-L}^{i+L} E^N |\xi_j^j(t) - \xi_j^i(t)|,$$

pela invariância da exponencial, o segundo termo na direita acima,

$$E^N |\xi_j^j(t) - \xi_j^i(t)| = |E^N \xi_j^j(t) - E^N \xi_j^i(t)| = |E^N \xi_j^j - E^N \xi_j^i| = |u_0(\frac{j}{N}) - u_0(\frac{i}{N})|,$$

a esperança pode trocar com o valor absoluto pois a ordem dos processos ξ^i e ξ^j definida no acoplamento é conservada pela atratividade. Além disso, u_0 é Lipschitz contínua integrável, portanto, $|u_0(\frac{j}{N}) - u_0(\frac{i}{N})| \sim \frac{i-j}{N} u_0'$, como a derivada também é integrável, esta soma vai para zero quando $N \rightarrow \infty$. Por outro lado, o primeiro termo, como cada

expressão do tipo $|\eta_j(t) - \xi_j^j(t)|$ vai aparecer no máximo $2L + 1$ vezes, está limitado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} E^N |\eta_i(t) - \xi_i^i(t)| &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} E^N |\eta_i - \xi_i^i| \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} E^N \left[\int_0^t N \bar{\mathcal{L}} |\eta_i(s) - \xi_i^i(s)| ds \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O primeiro termo na direita acima se anula por construção e o segundo pelo Lema 3.5 a seguir.

Desta forma, todo ponto limite está concentrado na única solução entrópica Dirac quando o dado inicial u_0 é uma função duas vezes continuamente diferenciável e estritamente positiva que vai para zero no infinito de forma que u_0 e u_0' são inintegráveis. Usando aproximação, que sera feita na seção 3.4, podemos estender este resultado para um dado inicial em $L_\infty(\mathbb{R})$ como suposto no Teorema 2.1.

Lema 3.5. *Seja (η, ξ^i, ξ^j) o acoplamento como definido na prova de (c). Então,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \limsup_{N, L \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} E^N \left[\int_0^t \bar{\mathcal{L}} |\eta_i(s) - \xi_i^i(s)| ds \right] = 0.$$

Demonstração. Seguindo a ideia na prova da Proposição 3.3,

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^t E^N \bar{\mathcal{L}} |\eta_i(s) - \xi_i^i(s)| ds \\ &\leq \int_0^t E^N \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \frac{|(\eta_j(s))^2 - (\xi_j^i(s))^2|}{2} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|(\eta_i(s))^2 - (\xi_i^i(s))^2|}{2} \right] ds. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $(\xi_j^j(s))^2$ no primeiro termo,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \frac{|(\eta_j(s))^2 - (\xi_j^i(s))^2|}{2} &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \frac{|(\eta_j(s))^2 - (\xi_j^j(s))^2|}{2} \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \frac{|(\xi_j^j(s))^2 - (\xi_j^i(s))^2|}{2} \end{aligned}$$

mas na primeira soma, para cada i cada termo se repete ao máximo $2R + 1$ com um correspondente $p(j)$, $j = -R, \dots, R$, portanto, está limitado por

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|(\eta_i(s))^2 - (\xi_i^i(s))^2|}{2},$$

que simplifica com o segundo termo. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} E^N \left[\int_0^t \bar{\mathcal{L}} |\eta_i(s) - \xi_i^i(s)| ds \right] &\leq \int_0^t E^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \frac{|(\xi_j^j(s))^2 - (\xi_j^i(s))^2|}{2} ds \\ &= \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \frac{|E^N(\xi_j^j(s))^2 - E^N(\xi_j^i(s))^2|}{2} ds \\ &= t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) \frac{|E^N(\xi_j^j)^2 - E^N(\xi_j^i)^2|}{2}, \end{aligned}$$

pois a ordem dos processos ξ^i e ξ^j definida no acoplamento é conservada. Como ξ_j^k são variáveis exponenciais, $E(\xi_j^k)^2 = 2u_0^2(\frac{k}{N})$, onde $k = i$ ou j , teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} E^N \left[\int_0^t \bar{\mathcal{L}} |\eta_i(s) - \xi_i^i(s)| ds \right] &= t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) |u_0^2(\frac{j}{N}) - u_0^2(\frac{i}{N})| \\ &\leq 2t \|u_0\|_\infty \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i-R}^{i+R} p(i-j) |u_0(\frac{j}{N}) - u_0(\frac{i}{N})| \end{aligned}$$

Como u_0 é diferenciável, $|u_0(\frac{j}{N}) - u_0(\frac{i}{N})| \sim \frac{i-j}{N} u_0'(\iota)$, com ι no intervalo formado por $\frac{i}{N}$ e $\frac{j}{N}$, sendo u_0' também integrável, juntando esta soma com este fator da ordem $1/N$, a expressão é limitada uniformemente em N e L , assim, vai para zero quando $t \rightarrow 0$. \square

3.4 Extensão ao caso geral

Para concluir com a prova do Teorema 2.1 vamos aproximar o caso geral, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ aproximando por funções que satisfazem nosso suposto durante a prova ($u_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$ integrável com derivada integrável e estritamente positiva).

Seja $u_\varepsilon \in C_0^2(\mathbb{R})$ tal que $u_\varepsilon(x) > 0$, com u_ε e u'_ε integráveis e para cada $\phi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) |u_\varepsilon(x) - u_0(x)| dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Onde $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, como nas hipóteses do Teorema 2.1. Por exemplo, podemos tomar uma função $0 \leq \bar{u}_\varepsilon \in C_0^2(\mathbb{R})$ com as propriedades de integrabilidade de acima que aproxima u_0 e $u_\varepsilon(x) = \bar{u}_\varepsilon(x) + \varepsilon(x)$, onde o termo $0 < \varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $\sup_x \varepsilon(x) \leq \varepsilon$ e com as correspondentes propriedades de integrabilidade.

Para cada $\varepsilon > 0$ e N , seja o acoplamento (η, η^ε) com medida inicial $\mu^{\varepsilon, N}$ e marginais processos de bastões iniciando em μ_0 e μ_0^ε respectivamente, onde μ_0^ε é o produto de exponenciais independentes e para cada bastão, $\mu_0^\varepsilon\{\eta_i^\varepsilon\} = u_\varepsilon(i/N)$, de forma que se

$$\mu^{\varepsilon, N}(\eta_i \leq \eta_i^\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{se } v(i) \leq u_\varepsilon(i/N) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.11)$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$ e $v(\cdot)$ como em (2.8). Assim,

$$\begin{aligned} & P^N \left[\left| \alpha_{tN}^N\{\phi\} - \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u(t, x) dx \right| > \delta \right] \\ & \leq P^{\mu^{\varepsilon, N}} \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(i/N) [\eta_i(t) - \eta_i^\varepsilon(t)] \right| > \frac{\delta}{3} \right] \\ & \quad + P^{\mu^{\varepsilon, N}} \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(i/N) \eta_i^\varepsilon(t) - \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u_\varepsilon(t, x) dx \right| > \frac{\delta}{3} \right] \\ & \quad + P^{\mu^{\varepsilon, N}} \left[\int_{\mathbb{R}} \phi(x) |u_\varepsilon(t, x) - u(t, x)| dx > \frac{\delta}{3} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tomando ε suficientemente pequeno, de forma que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) |u_\varepsilon(x) - u_0(x)| dx < \frac{\delta}{3}$, o último termo acima se anula pois toda solução entrópica satisfaz a desigualdade de contração em L^1 , para cada $0 \leq s \leq t$, (ver Kružkov (1970))

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\varepsilon(t, x) - u(t, x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_\varepsilon(s, x) - u_0(s, x)| dx.$$

Como u_ε satisfaz as hipóteses da seção anterior, o segundo termo da direita em (3.12), converge para zero quando $N \rightarrow \infty$ para cada $\varepsilon > 0$.

Por outro lado, o primeiro na direita em (3.12) termo está limitado por

$$\begin{aligned} \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta N} \sum_{i=-K_\phi N}^{K_\phi N} E |\eta_i(t) - \eta_i^\varepsilon(t)| &= \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta N} \sum_{i=-K_\phi N}^{K_\phi N} E |\eta_i - \eta_i^\varepsilon| \\ &+ \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta} E \int_0^t \bar{\mathcal{L}} \sum_{i=-K_\phi N}^{K_\phi N} |\eta_i(s) - \eta_i^\varepsilon(s)| ds, \end{aligned}$$

onde K_ϕ é tal que $\text{Sp } \phi \in [-K_\phi, K_\phi]$. Tomando limite quando $N \rightarrow \infty$ o segundo termo na direita é não positivo pelo Lema 2.14, e o primeiro vai estar limitado por

$$\begin{aligned} \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta N} \sum_{i=-K_\phi N}^{K_\phi N} E |\eta_i - \eta_i^\varepsilon| &= \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta N} \sum_{i=-K_\phi N}^{K_\phi N} |E\eta_i - E\eta_i^\varepsilon| \\ &= \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta N} \sum_{i=-K_\phi N}^{K_\phi N} |v(i) - u_\varepsilon(i/N)|, \end{aligned} \tag{3.13}$$

pois o acoplamento definido por $\mu^{\varepsilon, N}$ em (3.11) conserva a ordem e permite trocar esperança com o módulo.

Seja $u_0^N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função definida como $u_0^N(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E\eta_i \mathbf{1}_{[\frac{i-1/2}{N}, \frac{i+1/2}{N})}(x)$, desta forma o último termo em (3.13) está limitado por

$$\begin{aligned} \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta} \int_{-K_\phi}^{K_\phi} |u_0^N(x) - u_\varepsilon(i/N)| dx &\leq \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta} \int_{-K_\phi}^{K_\phi} |u_0^N(x) - u_0(x)| dx \\ &+ \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta} \int_{-K_\phi}^{K_\phi} |u_0(x) - u_\varepsilon(x)| dx \\ &+ \frac{3\|\phi\|_\infty}{\delta N} \sum_{i=-K_\phi N}^{K_\phi N} \left| u_\varepsilon\left(\frac{i}{N}\right) - N \int_{\frac{i-1/2}{N}}^{\frac{i+1/2}{N}} u_\varepsilon(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Por hipótese, a primeira integral acima à direita vai para zero quando $N \rightarrow \infty$, enquanto a segunda se anula quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por outra parte o terceiro termo, para cada $\varepsilon > 0$, converge para zero quando $N \rightarrow \infty$, pois u_ε é contínua.

Deste modo para cada $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ não negativa e cada $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} P^N \left[\left| \alpha_{t_N}^N \{ \phi \} - \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u(t, x) dx \right| > \varepsilon \right] = 0$$

como queríamos provar. □

Referências Bibliográficas

- D. J. Aldous. Stopping times and tightness. *Ann. Probab.*, 6(2):335–340, 1978.
- David Aldous and Persi Diaconis. Hammersley’s interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probab. Th. Rel. Fields*, 103:199–213, 1995.
- D. Andreucci and E. DiBenedetto. Weak solutions of the type of nonstationary filtration. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 19(1):29 – 41, 1992. ISSN 0362-546X. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0362-546X\(92\)90028-D](http://dx.doi.org/10.1016/0362-546X(92)90028-D). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0362546X9290028D>.
- P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1999. ISBN 9780471197454.
- Bjorn E.J. Dahlberg and Carlos E. Kenig. Non-negative solutions of the porous medium equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 9(5):409–437, 1984. doi: 10.1080/03605308408820336.
- Ronald J. DiPerna. Measure-valued solutions to conservation laws. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 88(3):223–270, 1985. ISSN 0003-9527. doi: 10.1007/BF00752112. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00752112>.
- Michael Ekhaus and Timo Seppäläinen. Stochastic dynamics macroscopically governed by the porous medium equation for isothermal flow. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica*, 21(2):309–352, 1996. URL <http://eudml.org/doc/227803>.
- Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes: characterization and convergence*. Wiley series in probability and mathematical statistics. J. Wiley & Sons, New York, Chichester, 1986. ISBN 0-471-08186-8.
- Gerald B. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and their Applications*. Wiley, New York, NY, second edition, 1999.
- M. Z. Guo, G. C. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan. Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 118(1):31–59, 1988. URL <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104161907>.

- J. M. Hammersley. A few seedlings of research. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Theory of Statistics*, pages 345–394, Berkeley, Calif., 1972. University of California Press. URL <http://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200514101>.
- R. A. Holley and D. W. Stroock. A martingale approach to infinite systems of interacting processes. *Ann. Probab.*, 4(2):195–228, 04 1976. doi: 10.1214/aop/1176996130.
- Claude Kipnis and Claudio Landim. *Scaling limits of interacting particle systems*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, New York, 1999. ISBN 3-540-64913-1.
- S N Kružkov. First order quasilinear equations in several independent variables. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 10(2):217, 1970. URL <http://stacks.iop.org/0025-5734/10/i=2/a=A06>.
- Thomas Milton Liggett. *Interacting particle systems*. Classics in mathematics. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2005. ISBN 3-540-22617-6.
- Fraydoun Rezakhanlou. Hydrodynamic limit for attractive particle systems on \mathbf{z}^d . *Communications in Mathematical Physics*, 140(3):417–448, 1991. URL <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104248092>.
- Timo Seppäläinen. A microscopic model for the burgers equation and longest increasing subsequences. *Electron. J. Probab.*, 1:no. 5, 1–51, 1996. ISSN 1083-6489. doi: 10.1214/EJP.v1-5. URL <http://ejp.ejpecp.org/article/view/5>.
- Yuki Suzuki and Kôhei Uchiyama. Hydrodynamic limit for a spin system on a multidimensional lattice. *Probability Theory and Related Fields*, 95(1):47–74, 1993. ISSN 0178-8051. doi: 10.1007/BF01197337. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01197337>.

Topologia do espaço de estados

Lema .6. *Dada a métrica em (1.6), Y é um subconjunto fechado de $[0, \infty)$.*

Demonstração. Seja (η^k) uma sequência em Y que converge para $\eta^0 \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}}$ na métrica (1.6). Assim,

$$\sup_{n \geq 1} \delta \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k \right\} \xrightarrow{k} 0$$

qualquer seja $\varepsilon > 0$, podemos achar N , independente do n , tal que para todo $k \geq N$,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \leq \varepsilon + \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^N \xrightarrow{n} \varepsilon$$

como ε é arbitrário, o limite da parte esquerda tem que ser nulo, o que implica que $\eta^0 \in Y$. □

Proposição .7. *O espaço métrico (Y, d) é completo e separável.*

Demonstração. Seja (η^n) uma sequência de Cauchy em Y , portanto é de Cauchy na topologia produto, assim, para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe $\eta_i^0 \in [0, \infty)$ tal que $\eta_i^n \rightarrow \eta_i^0$, e consequentemente

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\eta_i^n, \eta_i^0)}{2^{-|i|}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Qualquer seja $\varepsilon > 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja N_i tal que $|\eta_i^n - \eta_i^0| < \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)}$ para cada $n \geq N_i$, logo,

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right) &\leq \sup_{n \geq 1} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^{N_i} \right) \\ &\quad + \sup_{n \geq 1} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^{N_i}, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right). \end{aligned}$$

Quando k e N_i são maiores ou iguais do que N , onde $d(\eta^m, \eta^{m'}) < \varepsilon/2$ para $m, m' \geq N$, o primeiro termo na direita acima é menor do que $\varepsilon/2$.

Agora

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^{N_i} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right| &\leq \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n |\eta_i^{N_i} - \eta_i^0| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Assim

$$\sup_{n \geq 1} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^{N_i}, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right) < \varepsilon$$

portanto $d(\eta^k, \eta^0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, e como Y é fechado, $\eta^0 \in Y$. \square

Lema .8. *Sejam $\eta, \xi \in Y$, então existe N tal que*

$$\sup_{1 \leq n} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i \right) = \max_{1 \leq n \leq N} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i \right).$$

Demonstração. Como $\eta, \xi \in Y$ temos que

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

portanto,

$$\delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Considerando $n = 1$, tomemos $\varepsilon = \delta(\eta_{-1} + \eta_0 + \eta_1, \xi_{-1} + \xi_0 + \xi_1)$, assim, existe N tal que para todo $n > N$,

$$\delta\left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i\right) < \varepsilon$$

deste modo o supremo acima é atingido quando $n \leq N$. \square

Lema .9. Para cada n , $f_n : (Y, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, definida como

$$f_n(\eta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i$$

é continua.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e sejam $\eta, \xi \in Y$, tais que, $d(\eta, \xi) < \delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, assim

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \xi_i \right| \leq \varepsilon$$

como queríamos demonstrar. \square

Lema .10. Um subconjunto K de Y é compacto se, e somente se, é compacto na topologia produto e

$$\limsup_n \sup_{\eta \in K} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i = 0. \quad (14)$$

Demonstração. Se supomos primeiro que K é compacto na nossa métrica, trivialmente ele é compacto na topologia produto. Além disso, para cada n o supremo em (1.16) é atingido para um elemento $\eta^n \in K$. Assim podemos tomar limite superior e obtemos

$$\limsup_n \sup_{\eta \in K} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i \leq \limsup_n \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^n = 0,$$

pois todo ponto de acumulação para η^n pertence a K .

Suponhamos agora que K é compacto na topologia produto e que satisfaz a condição (1.16). Seja $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em K , assim existe $(\eta^{n'})$ e $\eta^0 \in K$ de forma que $\eta^{n'} \rightarrow \eta^0$ na topologia produto.

Por outra parte, seguindo a ideia do Lema .8 existe N tal que,

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq n} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right) &= \max_{1 \leq n \leq N} \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^N \delta \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k, \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right) \end{aligned}$$

pois, para cada n ,

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k - \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right| \leq \sup_{\eta \in K} \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0.$$

Para todo $\varepsilon > 0$ e cada $i = 1, 2, \dots, N$, existe N_i tal que $|\eta_i^k - \eta_i^0| < \frac{N}{2}\varepsilon$ quando $k \geq N_i$, tomando $N_0 = \max\{N_1, N_2, \dots, N_N\}$, temos que para $k \geq N_0$

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^k - \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n \eta_i^0 \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^n |\eta_i^k - \eta_i^0|,$$

assim temos também convergência na métrica $\delta(\cdot, \cdot)$. □