

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Hidrodinâmica para um Processo Zero
Range unidimensional com dissipação de
massa na Fronteira**

Luzia da Costa Tonon Martarelli

Rio de Janeiro

2015

Luzia da Costa Tonon Martarelli

**Hidrodinâmica para um Processo Zero Range unidimensional com
dissipação de massa na Fronteira**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Estatística.

Orientador:

Glauco Valle da Silva Coelho

Departamento de Métodos Estatísticos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Novembro de 2015

Hidrodinâmica para um processo Zero Range unidimensional com dissipação de massa na fronteira

Luzia da Costa Tonon Martarelli
Orientador: Glauco Valle da Silva Coelho

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Estatística.

Banca examinadora:

Glauco Valle da Silva Coelho - UFRJ (Presidente)

Maria Eulália Vares - UFRJ

Leandro Pinto Rodrigues Pimentel - UFRJ

Ana Patrícia Carvalho Gonçalves - PUC-RIO

Fábio Júlio da Silva Valentim - UFES

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela força e luz durante todo o meu percurso até aqui.

À minha família e aos meus amores, Angelo, Luisa e Rafael pelo apoio incondicional. Te-los me fez forte e acreditar que seria possível.

Ao programa de pós graduação de Estatística da UFRJ , por ter me aceitado pela segunda vez e principalmente ao meu orientador Glauco Valle, pela infinita paciência e disponibilidade. Aos professores do programa pelos ensinamentos .

A todos os colegas e amigos que tive oportunidade de conhecer, em especial aos meus amigos Felipe Rafael e Vinicius Israel, com os quais pude compartilhar muitos momentos de alegria e algumas tristezas durante o longo percurso.

Agradeço também a banca do exame, Maria Eulália Vares, Leandro Pimentel, Ana Patricia Gonçalvez e Fábio Júlio Valentim.

Não poderia esquecer o meu grande mestre Florêncio Guimarães, da UFES, onde tudo começou, quem me deu os primeiros ensinamentos e me mostrou a beleza e desafios da matemática.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O Comportamento hidrodinâmico de sistemas de partículas é um problema central para a compreensão da passagem da descrição microscópica para a macroscópica em modelos teóricos da mecânica estatística. O objetivo é obter teoremas limites envolvendo mudanças de escala espaços-temporais, lei dos grandes números para os vários campos microscópicos. O limite hidrodinâmico permite obter uma descrição das características termodinâmicas (temperatura, pressão, densidade) de sistemas infinitos, assumindo que a dinâmica das partículas é estocástica. Um conhecido sistema de partículas interagentes é o processo Zero Range (ou chamado de alcance nulo) que será denotado por ZR. Informalmente o processo ZR em $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é um processo estocástico com espaço de configurações $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}}$, com $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, que pode ser informalmente descrito da seguinte forma: pensamos que uma configuração $\eta = (\eta(x))_{x \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ representa um estado de um sistema físico onde $\eta(x)$ é o número de partículas ocupando a posição $x \in \mathbb{N}$. Para cada par de posições (x, y) temos associado um relógio exponencial de taxa $\lambda(\eta(x), y)$ quando o primeiro relógio toca se ele é referente ao par (x, y) , uma partícula de pula para posição y , e os relógios são renovados de forma independente. O termo ZR é referente ao fato de que não existe interação em partículas de sítios distintos, ou seja, quando uma partícula pula de x para y essa transição só depende do número de partículas em x e não depende do número de partículas em y . O processo ZR simétrico entre vizinhos próximos em $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$ é definido de maneira análoga. Nesta tese consideraremos um acoplamento de processos ZR, um em \mathbb{N} e outro em \mathbb{Z}_- com condições de fronteira. Na fronteira ambos os processos perdem partículas simultaneamente. As principais motivações para este trabalho, que serviram como base nas técnicas que utilizamos, são encontradas nos artigos de Landim e Valle (2006) e Valle (2007). Nestes artigos são considerados problemas de hidrodinâmica para sistemas não conservativos acoplados por condições de fronteira.

Abstract

The hydrodynamic behavior of particle systems is a central problem for the understanding of the passage from microscopic to macroscopic description in theoretical models of statistical mechanics. The goal is to obtain boundary theorems involving space-time scale changes, the law of large numbers for the various microscopic fields. The hydrodynamic limit allows a description of the thermodynamic characteristics (temperature, pressure, density) of infinite systems, assuming that the particle dynamics is stochastic. A known system of interacting particles is the Zero Range (or so-called zero-range) process that will be denoted by ZR. Informally the ZR process in $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$ is a stochastic process with configuration space $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}}$, with $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, which can be informally described as follows: we think that a configuration $\eta = (\eta(x))_{x \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}}$ represents a state of a physical system where $\eta(x)$ is the number of particles occupying the position x . For each pair of positions (x, y) we have associated an exponential clock of rate $\lambda(\eta(x), y)$ when the first clock strikes if it is related to the pair (x, y) , a particle jumps from x to y position, and the watches are renewed independently. The term ZR refers to the fact that there is no interaction in particles of distinct sites, that is, when a particle jumps from x to y this transition depends only on the number of particles in x and does not depend on the number of particles in y . The symmetric ZR process between neighboring neighbors in $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ is defined in an analogous way. In this thesis we will consider a coupling of ZR processes, one in \mathbb{N} and another in \mathbb{Z} with boundary conditions. At the border both processes lose particles simultaneously. The main motivations for this work, which served as a basis for the techniques we use, are found in Landim and Valle (2006) and Valle (2007) articles. In this paper, hydrodynamic problems are considered for non-conservative systems coupled by boundary conditions.

Sumário

| | |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Conceitos Preliminares e Teorema Principal | 3 |
| 1.0.1 O Teorema Principal | 5 |
| 2 O Limite Hidrodinâmico | 7 |
| 2.1 O processo transformado | 8 |
| 2.1.1 Hipóteses sobre as medidas iniciais | 11 |
| 2.1.2 O comportamento hidrodinâmico | 12 |
| 2.1.3 Passagem do Processo de Exclusão para o Processo Zero Range . | 14 |
| 3 A demonstração do limite hidrodinâmico | 19 |
| 3.0.4 Rigidez | 19 |
| 3.1 Pontos limite de $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ | 24 |
| 3.2 Unicidade de soluções fracas da equação (2.4) | 34 |
| 3.2.1 Uma estimativa de energia | 39 |
| A Acoplamento | 44 |
| B Cota superior para entropia relativa | 52 |
| C Cálculo da Variação Quadrática | 57 |
| Referências Bibliográficas | 73 |

Introdução

O Comportamento hidrodinâmico de sistemas de partículas é um problema central para a compreensão da passagem da descrição microscópica para a macroscópica em modelos teóricos da mecânica estatística. O objetivo é obter teoremas limites envolvendo mudanças de escala espaço-temporal, lei dos grandes números para os vários campos microscópicos. O limite hidrodinâmico permite obter uma descrição das características termodinâmicas (temperatura, pressão, densidade) de sistemas infinitos, assumindo que a dinâmica das partículas é estocástica. Para o leitor interessado sugerimos [7] onde os resultados fundamentais da teoria de limite hidrodinâmico podem ser encontrados.

Um conhecido sistema de partículas interagentes é o processo Zero Range (ou chamado de alcance nulo) que será denotado por ZR. Informalmente o processo ZR em $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é um processo estocástico com espaço de configurações $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}}$, com $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, que pode ser informalmente descrito da seguinte forma: pensamos que uma configuração $\eta = (\eta(x))_{x \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}}$ representa um estado de um sistema físico onde $\eta(x)$ é o número de partículas ocupando a posição $x \in \mathbb{N}$. Para cada par de posições (x, y) temos associado um relógio exponencial de taxa $\lambda_{\eta(x), y}$, quando o 1º relógio toca se ele é referente ao par (x, y) , uma partícula de x pula para posição y , e os relógios são renovados de forma independente. O termo ZR é referente ao fato de que não existe interação em partículas de sítios distintos, ou seja, quando uma partícula pula de x para y essa transição só depende do número de partículas em x e não depende do número de partículas em y . O processo ZR simétrico entre vizinhos próximos em $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$ é definido de maneira análoga. Nesta tese consideraremos um acoplamento de processos ZR, um em \mathbb{N} e outro em \mathbb{Z}_- com condições de fronteira.

As principais motivações para este trabalho, que serviram como base nas técnicas que utilizamos, são encontradas nos artigos de Landim e Valle [10] e Valle [12], o primeiro apresenta um modelo microscópico para a equação de Stefan através de um sistema de partículas interagentes chamado processo de exclusão com condições de fronteira; no artigo de Valle, ele identifica o modelo de Potts por uma descrição de um fenômeno

microscópico, acoplamento de dois processos: o de exclusão e o Zero Range, com condições de fronteira, e impõe ao sistema mudanças de escala sobre o espaço e tempo. Outra motivação para este trabalho é o artigo de Funaki e Sasada [3], no qual os autores mostram um limite hidrodinâmico para os diagramas de Young, pois poderíamos considerar o processo em questão na forma de diagrama de Young.

No capítulo 1 fazemos a descrição do nosso estudo, é enunciado o limite hidrodinâmico a ser provado. No capítulo 2 é dada a transformação que será usada para provar o limite hidrodinâmico, transformaremos o processo ZR num processo de exclusão onde resultados são conhecidos e que facilitará a demonstração. Já na subseção 2.1.1 são dadas hipóteses para as medidas iniciais, na seção 2.1.2 é enunciado o limite hidrodinâmico para o processo de exclusão associado e na seção 2.1.3 mostraremos a passagem do processo de Exclusão para o processo Zero Range. O capítulo 3 trata da demonstração do teorema do limite hidrodinâmico para o processo transformado. A demonstração desse teorema é dividida em 3 partes. Mostramos na seção 3.0.4 que uma sequência de probabilidades associadas aos processos microscópicos é rígida. Depois, na seção 3.1 que os limites são caracterizados como probabilidades concentradas em trajetórias de medidas que são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue. Por último mostramos a unicidade da solução fraca de uma EDP.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares e Teorema Principal

Inicialmente considere um processo Zero Range (ZR) em \mathbb{Z} , ou seja, um processo estocástico com espaço de configurações $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ que pode ser informalmente descrito da seguinte forma: pensamos que uma configuração $\eta = (\eta(x))_{x \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ representa um estado de um sistema físico onde $\eta(x)$ é o número de partículas ocupando a posição $x \in \mathbb{Z}$. Para cada par de posições (x, y) temos associado um relógio exponencial de taxa $\lambda_{\eta(x), y}$, quando o 1º relógio toca se ele é referente ao par (x, y) , uma partícula de x pula para a posição y , e os relógios são renovados de forma independente. O termo ZR é referente ao fato de que não existe interação em partículas de sítios distintos, ou seja, quando uma partícula pula de x para y essa transição só depende do número de partículas em x e não depende do número de partículas em y . Aqui vamos considerar

$$\lambda_{\eta(x), y} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } \eta(0) > 0 \text{ e } y = -1, x = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \eta(x) > 0 \text{ e } y = x - 1 \text{ ou } y = x + 1, x \in \mathbb{Z} - \{0, 1\} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \eta(1) > 0 \text{ e } y = 2, x = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtemos assim dois processos ZR simétricos entre vizinhos próximos independentes em \mathbb{N} e \mathbb{Z}_- , ou seja, o destino de uma partícula que deixa o sítio x é um dos vizinhos próximos de x ($x - 1$ ou $x + 1$), sendo a escolha feita com igual probabilidade. Além disso, não é permitido cruzamento por partículas do elo $0 - 1$.

Consideraremos um acoplamento dos processos Zero-Range (ZR) simétricos entre

vizinhos próximos, em \mathbb{N} e em \mathbb{Z}_- . Este processo é composto da dinâmica acima sobrepondo-se uma dinâmica adicional a que foi descrita acima. Esta é a seguinte: Se o ZR em \mathbb{N} possui o sítio 1 ocupado e o ZR em \mathbb{Z}_- possui o sítio 0 ocupado, então cada um dos sítios 0 e 1 perde uma partícula após um tempo exponencial de parâmetro 1 independente dos tempos de salto.

O objetivo é mostrar que este processo tem limite hidrodinâmico em escala difusiva, ou seja, que o comportamento macroscópico deste processo é descrito por soluções de uma equação diferencial parcial com condições de fronteira. O interessante é a perda de partículas na fronteira entre as posições 0 e 1. Isto gera condições de fronteira não lineares na equação hidrodinâmica que representam o comportamento macroscópico do sistema que dificultam a prova do limite hidrodinâmico.

Seja $\Omega = \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ o espaço das configurações. Denote por $\delta(k)$ a função

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \neq 0, \\ 0, & \text{se } k = 0, \end{cases}$$

e para $x \in \{0, 1\}$, e_x é uma configuração com apenas uma partícula em x e nenhuma nos outros sítios.

Para cada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dependendo de um número finito de coordenadas, o gerador do processo Zero Range com fronteira fixa entre 0 e 1 é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}f(\eta) &= \sum_{x \leq -1} \frac{1}{2} \delta(\eta(x)) [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] + \sum_{x \leq -1} \frac{1}{2} \delta(\eta(x+1)) [f(\eta^{x+1,x}) - f(\eta)] \\ &+ \sum_{x \geq 1} \frac{1}{2} \delta(\eta(x)) [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] + \sum_{x \geq 1} \frac{1}{2} \delta(\eta(x+1)) [f(\eta^{x+1,x}) - f(\eta)] + (\mathbb{L}_F)f(\eta), \end{aligned}$$

onde \mathbb{L}_F é a parte do gerador relacionada à característica dissipativa do sistema,

$$(\mathbb{L}_F f)(\eta) = \delta(\eta(0))\delta(\eta(1))\{f(\eta - e_0 - e_1) - f(\eta)\}, \text{ e}$$

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z), & \text{se } z \neq x, y, \\ \eta(x) - 1, & \text{se } z = x, \\ \eta(y) + 1, & \text{se } z = y, \end{cases}$$

se $\eta(x) > 0$.

Como as interações são locais, o gerador está bem definido, ver [13]. Portanto, existe um processo estocástico $(\eta_t)_{t \geq 0}$ sobre o espaço de configurações $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$.

1.0.1 O Teorema Principal

Notação:

- Um subíndice na função sempre denotará uma variável, não uma diferenciação. Por exemplo, $H_s(u)$ denota $H(s, u)$.
- $\dot{D}_s = \partial_s D_s$
- $D^N(t)$ é o número de partículas que o sistema perde até o tempo t , dividido por N .
- Derivadas parciais serão indicadas pelo símbolo ∂ e a derivada segunda na coordenada espacial será denotada por Δ .

Para $\rho > 0$, seja ν_ρ uma distribuição geométrica de média ρ sobre $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$, como medida de referência para todo o sistema.

Fixe uma sequência de medidas de probabilidade $\{\nu^N : N \geq 1\}$ sobre $\mathcal{P}(\Omega)$, o espaço de medidas de probabilidade sobre Ω . Para provar o comportamento hidrodinâmico do sistema assumiremos que

(E1) ν^N é estocasticamente limitada superiormente por ν_ρ para algum $\rho > 0$ constante.

(E2) Existe uma função contínua limitada $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que a sequência $(\nu^N)_{N \geq 1}$ é uma medida produto em $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ cujas marginais são geométricas de média variável dada por $\rho(\cdot)$ de forma que $\eta(x)$ tem distribuição $\text{Geom}\left(\frac{1}{\rho(x/N)+1}\right)$, se η tem distribuição ν^N . Em particular $(\nu^N)_{N \geq 1}$ está associada a um perfil inicial limitado $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, isto é, para cada $\delta > 0$ e cada função contínua $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu^N \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} G(x/N) \eta(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} du G(u) \rho(u) \right| > \delta \right] = 0.$$

Fixe $T > 0$ e denote por $\mathbb{P}_{\nu^N}^N$ a probabilidade sobre $D([0, T], \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}})$ induzida pelo processo de Markov η_t^N com gerador $N^2\mathbb{L}$ e com distribuição inicial ν^N . A esperança com respeito a $\mathbb{P}_{\nu^N}^N$ será denotada por $\mathbb{E}_{\nu^N}^N$.

Enunciamos o limite hidrodinâmico no próximo resultado.

Teorema 1.1. *Fixe uma sequência de medidas de probabilidade $\{\nu^N : N \geq 1\}$ sobre $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfazendo (E_1) e (E_2) com perfil inicial contínuo limitado $\rho_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Seja $D : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função de variação limitada. Para cada função contínua $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto e cada $\delta > 0$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} G(x/N) \eta_{tN^2}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \rho(t, u) du \right| > \delta \right) = 0,$$

onde $\rho : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é unicamente determinada por $\rho(t, u) = \frac{1}{\zeta(t, M^{-1}(t, u))} - 1$, e $M(t, B) = \int_{-B}^B \zeta(t, u) du$ com ζ sendo a única solução fraca da EDP

$$\begin{cases} \partial_t \zeta = \frac{1}{2} \Delta \zeta - \dot{D}_t \partial_u \zeta, & u > 0, \\ \partial_t \zeta = \frac{1}{2} \Delta \zeta + \dot{D}_t \partial_u \zeta, & u < 0, \\ \dot{D}_t = \partial_u \zeta(t, 0+) = -\partial_u \zeta(t, 0-), \\ \zeta(t, 0+) \zeta(t, 0-) = 0, \\ \zeta(0, u) = \zeta_0(u). \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\zeta_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é uma função mensurável, chamada perfil inicial de densidade.

No capítulo seguinte descreveremos as técnicas que serão usadas na demonstração deste teorema.

Capítulo 2

O Limite Hidrodinâmico

Para tratar este problema consideraremos uma aplicação na qual cada sítio (vazio ou não) no ZR será considerado um sítio vazio na Exclusão e cada partícula será considerada um sítio ocupado. Logo, teremos um acoplamento de dois processos de exclusão, um para a direita e outro para a esquerda da fronteira. Esta identificação é dada por uma aplicação que associa cada $\eta \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ a configuração $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & x = \sum_{z=1}^n \eta(z) + n \text{ com } n \geq 1 \text{ ou } x = -(\sum_{z=-n}^0 \eta(z) + n) \text{ com } n \geq 0, \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Como um exemplo podemos observar as figuras 2.1 e 2.2 a seguir.

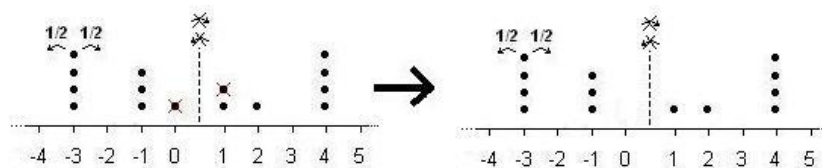


Figura 2.1: Processo Zero Range em \mathbb{Z} com partículas sendo canceladas nos sítios 0 e 1

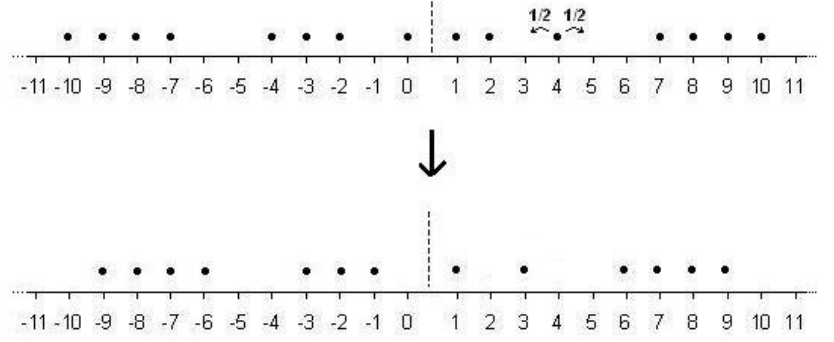


Figura 2.2: Processo de exclusão associado ao ZR em \mathbb{Z} .

Os parágrafos seguintes são para explicar as relações no enunciado do Teorema 1, onde ρ é constante. Como um exemplo, considere uma sequência inicial $(\nu(x))_{x \in \mathbb{Z}}$ de medidas produto cujas marginais são distribuições geométricas de média ρ de parâmetro $1 - \alpha$ independentes e identicamente distribuídas. Sabemos que $E(\text{Geom}(1 - \alpha)) = \rho$, mas por outro lado, $E(\text{Geom}(1 - \alpha)) = \frac{1}{1 - \alpha} - 1$. Logo, a relação entre ρ e α é dada por $\rho = \frac{1}{1 - \alpha} - 1$. Outra hipótese sobre estas medidas iniciais é que $\nu_\rho^N(x)$ é estocasticamente limitada por uma distribuição geométrica de média ρ^* , onde $\rho^* = \max\{\rho\}$.

Logo, pela transformação usada para levar o ZR na Exclusão, tem-se que, ν_ρ^N é levada na medida μ_α^N (medida de Bernoulli de parâmetro α) tal que μ_α^N é estocasticamente limitada por $\mu_{\alpha^*}^N$, onde $\alpha^* = \arg \max_\alpha \{\rho = \frac{\alpha}{1 - \alpha}\}$.

2.1 O processo transformado

Seja agora o espaço das configurações $\tilde{\Omega} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. O gerador do Processo de Exclusão associado ao nosso processo ZR é dado por

$$L = L_1 + L_2 + L_T,$$

onde L_1 e L_2 são as partes do gerador relacionadas ao movimento de partículas num processo de exclusão simples simétrico sobre \mathbb{Z}_- e \mathbb{N} respectivamente:

$$L_1 = \sum_{x \leq -1} L_{x, x+1}, \quad L_2 = \sum_{x \geq 1} L_{x, x+1}, \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} L_{x, x+1} f(\xi) &= \frac{1}{2} \xi(x) (1 - \xi(x+1)) [f(\xi^{x, x+1}) - f(\xi)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \xi(x+1) (1 - \xi(x)) [f(\xi^{x+1, x}) - f(\xi)] \end{aligned}$$

e

$$\xi^{x,x+1}(y) = \begin{cases} \xi(y), & \text{se } y \neq x, x+1, \\ \xi(x) - 1, & \text{se } y = x, \\ \xi(x+1) + 1, & \text{se } y = x+1, \end{cases}$$

para cada $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dependendo de um número finito de coordenadas e cada $x \in \mathbb{Z}$. L_T é a parte relacionada às translações:

$$L_T(f(\xi)) = \xi(0)\xi(1)\{f(\tau_{\pm 1}(\xi - \varrho_0 - \varrho_1)) - f(\xi)\}$$

onde

$$(\tau_{\pm 1}\xi)(x) = \begin{cases} \xi(x-1), & \text{se } x < 0, \\ \xi(x+1), & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

e $x \in \{0, 1\}$, ϱ_x é uma configuração com apenas uma partícula em x e nenhuma nos outros sítios.

L é um gerador de um processo de Feller, porque satisfaz as condições em [11]. Então, associado ao gerador L , existe um processo de Feller $(\xi_t)_{t \geq 0}$ no espaço de configurações $\tilde{\Omega}$.

Consideraremos aqui a generalização deste modelo, ou seja, consideraremos um processo de exclusão com condições de fronteira, onde são permitidos saltos de tamanho M . Seja $p(\cdot)$ uma probabilidade de transição simétrica com alcance finito M sobre \mathbb{Z} , $p(z) = p(-z) \forall z \in \mathbb{Z}$ e $p(z) = 0$, se $|z| > M$. Definimos um processo de exclusão sobre \mathbb{Z} associado a $p(\cdot)$, que é um processo com espaço de configurações $\tilde{\Omega}$, cuja evolução pode ser descrita da seguinte maneira: inicialmente cada sítio de \mathbb{Z} pode estar ou não ocupado por uma partícula, cada partícula do sistema aguarda, independentemente de qualquer outra partícula, um tempo exponencial de parâmetro 1 e naquele tempo ele escolhe outro sítio de acordo com $p(\cdot)$ e salta para o sítio escolhido se ele não está ocupado. Além disso há condições de fronteira: partículas do lado direito da fronteira não podem saltar para a esquerda da mesma, e vice-versa. O gerador do novo processo é

$$Lf\xi(x) = \sum_{i=-M}^M L_i f\xi(x) + L_T f(\xi(x)).$$

Para cada $i = 1, \dots, M$, $L_i = \sum_{y>0} L_{y,y+i}$ e $L_{-i} = \sum_{y\leq -i} L_{y,y+i}$. Onde para cada função local $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ e cada inteiro y ,

$$(L_{y,y+i}f)(\xi) = f(\xi^{y,y+i}) - f(\xi).$$

Para o nosso caso temos,

$$L_i\xi(x) = p(i) \sum_{y>0} [\xi(y)(1 - \xi(y+i))(\xi^{y,y+i}(x) - \xi(x)) + \xi(y+i)(1 - \xi(y))(\xi^{y+i,y}(x) - \xi(x))],$$

$$L_{-i}\xi(x) = p(i) \sum_{y\leq -i} [\xi(y)(1 - \xi(y+i))(\xi^{y,y+i}(x) - \xi(x)) + \xi(y+i)(1 - \xi(y))(\xi^{y+i,y}(x) - \xi(x))],$$

$$L_T\xi(x) = \begin{cases} \xi(0)\xi(1)(\xi(x+1) - \xi(x)), & \text{se } x \geq 1, \\ \xi(0)\xi(1)(\xi(x-1) - \xi(x)), & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Além disso,

$$\xi^{y,y+i}(x) - \xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x, \xi(y) = 0 \text{ e } \xi(y+i) = 1, \\ -1, & \text{se } y = x, \xi(y) = 1 \text{ e } \xi(y+i) = 0, \\ 1, & \text{se } y = x-i, \xi(x) = 0 \text{ e } \xi(x-i) = 1, \\ -1, & \text{se } y = x-i, \xi(x) = 1 \text{ e } \xi(x-i) = 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} .$$

Fazendo alguns cálculos elementares, observamos que

$$L_i\xi(x) = \begin{cases} p(i)\{\xi(x-i) - 2\xi(x) + \xi(x+i)\}, & \text{se } x \geq i+1, \\ p(i)\{\xi(x+i) - \xi(x)\}, & \text{se } x = 1, \dots, i, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$L_{-i}\xi(x) = \begin{cases} p(i)\{\xi(x-i) - 2\xi(x) + \xi(x+i)\}, & \text{se } x \leq -i, \\ p(i)\{\xi(x+i) - \xi(x)\}, & \text{se } x = -i+1, -i+2, \dots, -1, 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Outro cálculo elementar, que está no Apêndice, mostra que para cada função suave com

suporte compacto $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N^2 L\langle \pi^N, G \rangle &= \frac{\sigma^2}{2} \langle \pi^N, \Delta_N G \rangle + \xi(0)\xi(1)N[\langle \pi^N, H_1 \rangle - \langle \pi^N, H_2 \rangle] \\ &+ \xi(0)\xi(1)\nabla_N G(0) + \sum_{i=1}^M ip(i) \left\{ \sum_{y=1}^i \xi(y) - \sum_{y=-i+1}^{-1} \xi(y) \right\} \nabla_N G(0) + o(1/N), \end{aligned}$$

onde $\sigma^2 = \sum_{i=1}^M i^2 p(i)$ e $H_1(u) = \nabla G(u)I_{(-\infty,0]}(u)$, $H_2(u) = \nabla G(u)I_{[1,+\infty)}(u)$. Este cálculo será usado mais adiante, assim como o cálculo da variação quadrática do processo, que também se encontra no apêndice.

2.1.1 Hipóteses sobre as medidas iniciais

Dadas duas medidas μ, ν sobre $\tilde{\Omega}$, denotamos por $H(\mu|\nu)$ a entropia relativa de μ com respeito a ν :

$$H(\mu|\nu) = \sup_f \left\{ \int f d\mu - \log \int e^f d\nu \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções mensuráveis contínuas limitadas sobre $\tilde{\Omega}$.

Para $0 < \alpha < 1$, seja μ_α a medida produto Bernoulli de parâmetro α sobre $\tilde{\Omega}$ para todo o sistema.

Fixe uma sequência de medidas de probabilidade $\{\mu^N : N \geq 1\}$ sobre $\mathcal{P}(\tilde{\Omega})$, o espaço de medidas de probabilidade sobre $\tilde{\Omega}$. Para provar o comportamento hidrodinâmico do sistema assumiremos que

($\tilde{E}1$) μ^N é estocasticamente limitada superiormente por μ_α para algum $0 < \alpha < 1$.

($\tilde{E}2$) A sequência $(\mu^N)_{N \geq 1}$ está associada a um perfil inicial mensurável e limitado $\zeta_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, isto é, para cada $\delta > 0$ e cada função contínua $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} G(x/N) \xi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} du G(u) \zeta_0(u) \right| > \delta \right] = 0.$$

($\tilde{E}3$) Existe $0 < \alpha < 1$ tal que $H(\mu^N|\mu_\alpha) \leq CN$ para alguma constante $C > 0$.

2.1.2 O comportamento hidrodinâmico

Seja $D([0, T], \mathcal{M})$ o espaço das funções contínuas à direita com limites à esquerda sobre \mathcal{M} dotada da topologia Skorohod. Analogamente definimos $D([0, T], \tilde{\Omega})$. Para cada medida de probabilidade μ sobre $\tilde{\Omega}$, denote por \mathbb{P}_μ^N a medida de probabilidade sobre $D([0, T], \tilde{\Omega})$ induzida pelo processo de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ com gerador L acelerado por N^2 com medida inicial μ , e por \mathbb{E}_μ^N , o valor esperado com respeito a medida \mathbb{P}_μ^N . Enunciamos com o seguinte teorema o limite hidrodinâmico.

Teorema 2.1. *Fixe uma sequência de medidas de probabilidade $\{\mu^N : N \geq 1\}$ sobre $\mathcal{P}(\tilde{\Omega})$ satisfazendo $(\tilde{E}_1) - (\tilde{E}_3)$ com perfil inicial mensurável e limitado $\zeta_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada função contínua $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto, cada $\delta > 0$ e $t > 0$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} G(x/N) \xi_t(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \zeta(t, u) du \right| > \delta \right) = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^N (|D^N(t) - D(t)| > \delta) = 0,$$

onde $(\zeta, D) : ([0, T] \times \mathbb{R}) \times [0, T] \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+$ é a solução fraca da equação

$$\begin{cases} \partial_t \zeta = \sigma^2 \Delta \zeta - \dot{D}_t \partial_u \zeta, & u > 0, \\ \partial_t \zeta = \sigma^2 \Delta \zeta + \dot{D}_t \partial_u \zeta, & u < 0, \\ \dot{D}_t = \partial_u \zeta(t, 0+) = -\partial_u \zeta(t, 0-), \\ \zeta(t, 0+) \zeta(t, 0-) = 0, \\ \zeta(0, u) = \zeta_0(u), \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $\zeta : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é uma função mensurável, chamada perfil de densidade variando em $t \in [0, T]$, $\sigma^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} i^2 p(i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_-} i^2 p(i)$.

Uma solução fraca de (2.4) é uma função mensurável $\zeta : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ e uma função de variação limitada $D : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para cada $G \in C_0^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ com $G(\cdot, 0) = 0$, vale que

$$\begin{aligned} & \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}} \zeta(s, u) \partial_s G(s, u) du dt + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}} \zeta(s, u) \Delta G du dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \dot{D}_s \zeta(s, u) \partial_u G(s, u) du dt \\ & + \int_{\mathbb{R}} du G(0, u) \zeta_0(u) - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T (\zeta(t, 0+) - \zeta(t, 0-)) \partial_u G(t, 0) dt = 0. \end{aligned}$$

Seguimos uma adaptação do método de entropia de Guo, Papanicolau, Varadhan [4], semelhante aquelas usadas em [10] e [12] para sistemas não conservativos. O modelo

considerado impõe algumas dificuldades adicionais, mas juntas as técnicas empregadas em [12] e [10] podem ser usadas e adaptadas para nosso caso.

Na próxima seção mostraremos a passagem do processo de exclusão para o processo Zero Range, ou seja, que o teorema 2.1 implica teorema 1.1.

2.1.3 Passagem do Processo de Exclusão para o Processo Zero Range

Nesta seção provaremos o Teorema 1.1 a partir do Teorema 2.1. Para isto temos que mostrar que escolhendo $(\nu^N)_{N \geq 1}$, como definida na seção 1.0.1, satisfazendo (E1) e (E2) temos que $(\mu^N)_{N \geq 1}$, como definida na seção 2.1.1 (μ^N é a medida imagem de ν^N pela aplicação que leva o zero range na exclusão), satisfaz $(\widetilde{E1})$ - $(\widetilde{E3})$. Considere t fixo. Precisamos mostrar que para toda $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com suporte compacto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} G(x/N) \eta_{tN^2}(x) - \int G(t, u) \rho(t, u) du \right| > \delta \right) = 0, \quad (2.5)$$

para $\rho(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida como $\rho(t, u) = \frac{1}{\zeta(t, M^{-1}(t, u))} - 1$, onde $M(t, B) = \int_{-B}^B \zeta(t, u) du$ e ζ satisfaz 2.4.

Inicialmente não vamos considerar funções contínuas, mas sim da forma $G = \mathbb{I}_{[-\tilde{B}, B]}$. Logo, temos que mostrar

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{B}N}^{BN} \eta_{tN^2}(x) - \int_{-\tilde{B}}^B \rho(t, u) du \right| > \delta \right) = 0. \quad (2.6)$$

Observe que, considerando $B = \int_0^A \zeta(t, u) du$ e $\tilde{B} = \int_{-\tilde{A}}^0 \zeta(t, u) du$, pelo Teorema 2.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{B}N}^{BN} \eta_{tN^2}(x) &= \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{B}N}^{-1} \eta_{tN^2}(x) + \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{BN} \eta_{tN^2}(x) \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{x=-N(\frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{-1} \xi_{tN^2}(x))}^{-1} \eta_{tN^2}(x) + \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N(\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{AN} \xi_{tN^2}(x))} \eta_{tN^2}(x). \end{aligned}$$

Lembrando que a aplicação que associa a cada $\eta \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ a configuração $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ é dada por

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & x = \sum_{z=1}^n \eta(z) + n \text{ com } n \geq 1 \text{ ou } x = -(\sum_{z=-n}^0 \eta(z) + n) \text{ com } n \geq 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma configuração $\eta \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ está associada a uma configuração $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de tal maneira

que, para $x \in \mathbb{Z}$, $\eta(x)$ representa o número de sítios ocupados consecutivos entre o $(x-1)$ -sítio vazio e o x -sítio vazio na configuração ξ . Já que no processo de exclusão o número de sítios numa caixa finita é igual ao número total de sítios vazios mais o total de partículas, obtemos a seguinte relação:

$$\sum_{x=1}^n (1 - \xi(x)) + \sum_{y=1}^{\sum_1^n (1 - \xi(x))} \eta(y) \leq n \leq \sum_{x=1}^n (1 - \xi(x)) + \sum_{y=1}^{1 + \sum_{x=1}^n (1 - \xi(x))} \eta(y),$$

para todo $n \geq 1$.

Logo, fazendo $W_N^{A, \tilde{A}} = \frac{1}{N} \sum_{y=-N(\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)))}^{N(\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)))} \eta_{tN^2}(y)$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) + W_N^{A, \tilde{A}} &\leq (A + \tilde{A}) \leq \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{y=-N(1 + \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)))}^{N(1 + \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)))} \eta_{tN^2}(y). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} W_N^{A, \tilde{A}} &\leq (A + \tilde{A}) - \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \leq \frac{1}{N} \sum_{y=-N(\frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)))}^{N(\frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)))} \eta_{tN^2}(y) = \\ &= \frac{1}{N} \left[\eta_{tN^2} \left(-1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} \xi_{tN^2}(x) \right) + \eta_{tN^2} \left(1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right) \right] + W_N^{A, \tilde{A}}. \end{aligned}$$

Se mostrarmos que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\frac{1}{N} \left[\eta_{tN^2} \left(-1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_{tN^2} \left(1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right) \right] > \delta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

teremos o resultado desejado

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| W_N^{A, \tilde{A}} - ((A - \tilde{A}) - \int_{\tilde{A}}^A (1 - \zeta(t, u)) du) \right| > \delta \right) = 0 \quad (2.8)$$

onde

$$(A - \tilde{A}) - \int_{\tilde{A}}^A (1 - \zeta(t, u)) du = M^{-1}(t, B) - M^{-1}(t, \tilde{B}) - (B + \tilde{B}) = \int_{\tilde{B}}^B \partial_u(M^{-1}(t, u) - u) du.$$

Ou seja, provaremos (2.6), onde $\rho(t, u) = \partial_u(M^{-1}(t, u) - u)$.

Para demonstrar (2.7) primeiramente mostramos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\frac{1}{N} \left[\eta_{tN^2} \left(1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right) \right] > \delta \right) = 0$$

Para isto consideramos sítios próximos de $1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x))$ tais que (pelo mesmo argumento usado para limitar $W_N^{A, \tilde{A}}$ acima)

$$\begin{aligned} \eta_{tN^2} \left(1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right) &\leq \frac{1}{N} \sum_{y=1+\sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1-\xi_{tN^2}(x))}^{1+\sum_{x=-\tilde{A}N}^{(A+\epsilon)N} (1-\xi_{tN^2}(x))} \eta_{tN^2}(y) \\ &\leq \epsilon - \frac{1}{N} \sum_{x=AN}^{(A+\epsilon)N} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

O último termo da desigualdade acima tende para $\epsilon - \int_A^{A+\epsilon} \zeta(t, u) du$ em probabilidade quando $N \uparrow \infty$. Como ϵ é arbitrário, temos o limite desejado.

Analogamente, mostramos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\frac{1}{N} \left[\eta_{tN^2} \left(-1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right) \right] > \delta \right) = 0.$$

Obtendo assim (2.7).

Para finalizar o caso particular, observamos o seguinte

$$\mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| W_N^{A, \tilde{A}} - ((A - \tilde{A}) - \int_{\tilde{A}}^A (1 - \zeta(t, u)) du) \right| > \delta \right)$$

é menor do que ou igual a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| W_N^{A, \tilde{A}} - ((A - \tilde{A}) - \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x))) \right| > \delta/2 \right) \\ & + \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| \int_{\tilde{A}}^A (1 - \zeta(t, u)) du - \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right| > \delta/2 \right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1 o último termo do lado direito acima vai a zero quando $N \uparrow \infty$. Basta provar que o primeiro termo vai a zero quando $N \uparrow \infty$. Observe que

$$\left| W_N^{A, \tilde{A}} - ((A - \tilde{A}) - \frac{1}{N} \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x))) \right| \leq \frac{1}{N} \left[\eta_{tN^2} \left(1 + \sum_{x=-\tilde{A}N}^{AN} (1 - \xi_{tN^2}(x)) \right) \right].$$

O termo do lado direito da desigualdade acima vai a zero em probabilidade quando $N \uparrow \infty$. Concluindo assim o caso particular, quando temos $G = \mathbb{I}_{[\tilde{B}, B]}$.

Vamos obter (2.5) para qualquer G contínua com suporte compacto. Suponha que o suporte de G está contido em $[\tilde{B}, B]$. Particionamos o segmento $(\tilde{B}, B]$ em M pedaços de tamanho $\tilde{\epsilon} = \frac{B-\tilde{B}}{M}$. Logo, pela continuidade uniforme da função G

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{y=\tilde{B}N}^{BN} G(y/N) \eta_{tN^2}(y) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{y=(\tilde{B}+j\epsilon)N}^{(\tilde{B}+(j+1)\epsilon)N} G(y/N) \eta_{tN^2}(y) \approx \\ &\approx \sum_{j=0}^{M-1} G(\tilde{B} + j\epsilon) \frac{1}{N} \sum_{y=(\tilde{B}+j\epsilon)N}^{(\tilde{B}+(j+1)\epsilon)N} \eta_{tN^2}(y) \end{aligned}$$

Como vimos no caso particular

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{y=\lfloor (\tilde{B}+j\epsilon)N \rfloor}^{\lfloor (\tilde{B}+(j+1)\epsilon)N \rfloor} \eta_{tN^2}(y) - \int_{\tilde{B}+j\tilde{\epsilon}}^{\tilde{B}+(j+1)\tilde{\epsilon}} \rho(t, u) du \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ em probabilidade.}$$

Consequentemente,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\nu^N}^N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{y=\tilde{B}N}^{BN} G(y/N) \eta_{tN^2}(y) - \int_{\tilde{B}}^B G(u) \rho(t, u) du \right| > \delta \right) = 0,$$

como queríamos.

No próximo capítulo teremos a demonstração do limite hidrodinâmico para o processo transformado, que será dividida em 3 partes. Mostramos na seção 3.0.4 que uma

sequência de probabilidades associadas aos processos microscópicos é rígida. Depois, na seção 3.1 que os limites são caracterizados como probabilidades concentradas em trajetórias de medidas que são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue. Por último mostramos a unicidade da solução fraca de uma EDP.

Capítulo 3

A demonstração do limite hidrodinâmico

Este capítulo é dedicado a prova do Teorema 2.1. Antes precisaremos de algumas notações importantes. Denote por $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ o espaço de medidas de Radon sobre \mathbb{R} . A integração da função G com respeito a medida π em \mathcal{M} é denotada por $\langle \pi, G \rangle$. Para cada configuração $\xi \in \tilde{\Omega}$ associamos a medida empírica $\pi^N = \pi^N(\xi)$ em \mathcal{M} como sendo aquela que atribui massa N^{-1} a cada sitio ocupado por uma partícula na configuração ξ :

$$\pi^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \xi(x) \delta_{x/N}.$$

Seja $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ a medida de probabilidade sobre $D([0, T], \mathcal{M} \times \mathbb{R})$ induzida por $\mathbb{P}_{\mu^N}^N$ e o par (π^N, D_t) .

Provaremos o Teorema 2.1 com as seguintes etapas: mostraremos que a sequência de medidas $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ é rígida e que cada ponto limite da mesma está concentrado sobre caminhos absolutamente contínuos que são soluções fracas da equação (2.4). Em seguida, a unicidade das soluções da equação (2.4).

3.0.4 Rigidez

O objetivo desta seção é mostrar que a sequência de medidas de probabilidade $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ é rígida, ou seja, mostrar que $(\pi_t^N)_{t \geq 0}$ é rígida e $(D_t^N)_{t \geq 0}$ é rígida. A sequência $(\pi_t^N)_{t \geq 0}$ é rígida no espaço de medidas de probabilidade sobre $D([0, T], \mathcal{M})$ se para cada função suave com suporte compacto $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \pi_t^N, G \rangle$ é rígida como uma sequência aleatória sobre $D([0, T], \mathbb{R})$.

Agora fixe uma tal função, denote por $\mathcal{F}_t = \sigma((\pi_s), s \leq t)$, $t \geq 0$, a filtração natural sobre $D([0, T], \mathcal{M})$, e por \mathcal{T}_T a família de tempos de parada limitados por T .

De acordo com o critério Aldous [7] para mostrar a rigidez para $\langle \pi_t^N, G \rangle$ temos que verificar as duas seguintes condições:

(i) As distribuições finito dimensionais de $\langle \pi_t^N, G \rangle$ são rígidas,

(ii) $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \sup_{\theta \leq \gamma} \mathbb{P}_{\mu^N}^N [|\langle \pi_\tau^N, G \rangle - \langle \pi_{\tau+\theta}^N, G \rangle| > \epsilon] = 0.$$

A condição (i) é uma consequência do fato de que a medida empírica tem massa total finita sobre todo intervalo compacto. Para mostrar a condição (ii), considere o \mathcal{F}_t -martingal

$$M_t^{G,N} = \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \int_0^t N^2 L \langle \pi_s^N, G \rangle ds. \quad (3.1)$$

Portanto

$$\langle \pi_{\tau+\theta}^N, G \rangle - \langle \pi_\tau^N, G \rangle = M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_\tau^{G,N} + \int_\tau^{\tau+\theta} N^2 L \langle \pi_s^N, G \rangle ds.$$

A partir da expressão anterior,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mu^N}^N (|\langle \pi_{\tau+\theta}^N, G \rangle - \langle \pi_\tau^N, G \rangle| > \epsilon) &\leq \mathbb{P}_{\mu^N}^N (|M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_\tau^{G,N}| > \epsilon/2) \\ &+ \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left(\left| \int_\tau^{\tau+\theta} N^2 L \langle \pi_s^N, G \rangle ds \right| > \epsilon/2 \right). \end{aligned}$$

Logo (ii) segue de

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \sup_{\theta \leq \gamma} \mathbb{P}_{\mu^N}^N [M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_\tau^{G,N} > \epsilon/2] = 0 \quad (3.2)$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \sup_{\theta \leq \gamma} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\left| \int_\tau^{\tau+\theta} N^2 L \langle \pi_s^N, G \rangle ds \right| > \epsilon/2 \right] = 0 \quad (3.3)$$

Vamos mostrar (3.2) e (3.3) e completar a demonstração da rigidez. Um cálculo elementar

mostra que

$$\begin{aligned}
N^2 L\langle \pi^N, G \rangle &= \frac{\sigma^2}{2} \langle \pi^N, \Delta_N G \rangle + \xi(0)\xi(1)N[\langle \pi^N, H_1 \rangle - \langle \pi^N, H_2 \rangle] \\
&+ \xi(0)\xi(1)\nabla_N G(0) + \sum_{i=1}^M ip(i) \left\{ \sum_{y=1}^i \xi(y) - \sum_{y=-i+1}^{-1} \xi(y) \right\} \nabla_N G(0) + o(1/N),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $\sigma^2 = \sum_{i=1}^M i^2 p(i)$, Δ_N e ∇_N denotam, respectivamente, o laplaciano e gradiente discretos:

$$\begin{aligned}
(\Delta_N H)(u) &= \frac{H(u + \frac{1}{N}) + H(u - \frac{1}{N}) - 2H(u)}{(\frac{1}{N})^2}, \\
(\nabla_N H)(u) &= \frac{H(u + \frac{1}{N}) - H(u)}{\frac{1}{N}}
\end{aligned}$$

e $H_1(u) = \nabla_N G(u)I_{(-\infty, -1]}(u)$, $H_2(u) = \nabla_N G(u)I_{[0, +\infty)}(u)$.

Temos também uma fórmula explícita para a variação quadrática de $M_t^{G,N}$, ver Apêndice C. Esta é dada por

$$\begin{aligned}
\langle M_N^G \rangle_t &= \int_0^t \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{\substack{|x-y|=i \\ i=1,2,\dots,M \\ x,y \leq 0}} \nabla_N^2 G(x \wedge y/N) \xi_s(x) [1 - \xi_s(y)] \right. \\
&+ \sum_{\substack{|x-y|=i \\ i=1,2,\dots,M \\ x,y \geq 1}} \nabla_N^2 G(x \wedge y/N) \xi_s(x) [1 - \xi_s(y)] \\
&+ \xi_s(0)\xi_s(1) \left[\sum_{x,y \geq 1} \nabla_N G((x-1)/N) \nabla_N G((y-1)/N) \xi_s(x) \xi_s(y) \right. \\
&+ \sum_{x,y \leq 0} \nabla_N G(x/N) \nabla_N G(y/N) \xi_s(x) \xi_s(y) \\
&+ 2 \sum_{\substack{y \geq 2 \\ x \leq -1}} \nabla_N G(x/N) \nabla_N G((y-1)/N) \xi_s(x) \xi_s(y) \\
&\left. - 4NG(1/N) \sum_{x < 0} \nabla_N G(x/N) \xi_s(x) + 2N^2 G(1/N)G(0) \right] \Big\} ds.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Vamos começar provando (3.2). Pela desigualdade de Chebychev e da definição da

variação quadrática, como os tempos de parada são limitados (Teorema de Amostragem opcional), temos

$$\mathbb{P}_{\mu^N}^N[|M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_{\tau}^{G,N}| > \epsilon/2] \leq (\epsilon/2)^{-2} \mathbb{E}_{\mu^N}^N[(M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_{\tau}^{G,N})^2] = (\epsilon/2)^{-2} \mathbb{E}_{\mu^N}^N[\langle M_N^G \rangle_{\tau+\theta} - \langle M_N^G \rangle_{\tau}].$$

Pela igualdade acima, a partir da expansão de Taylor para G e como G tem suporte compacto temos que $\mathbb{E}_{\mu^N}^N[(M_{\tau+\theta}^{G,N} - M_{\tau}^{G,N})^2]$ é limitada superiormente por

$$\begin{aligned} & \frac{C(G)}{N} \left(\theta + \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds \right] \right. \\ & \left. - 4G(1/N) \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds \right] \right) \leq \tilde{C}(G)\theta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para obter a cota acima usamos o fato de G ter suporte compacto e ser de classe C^2 . Portanto, passando os limites, provamos (3.2).

Agora precisamos mostrar (3.3). Pela expressão dada em (3.5), basta mostrar que

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \sup_{\theta \leq \gamma} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds > \delta \right] = 0.$$

Este resultado segue do lema a seguir.

Lema 3.1. *Seja $(\mu^N)_{N \geq 1}$ satisfazendo a $\widetilde{E1}$. Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \sup_{\theta \leq \gamma} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds \right] \leq C. \quad (3.7)$$

Além disso, para todo $\delta > 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \sup_{\theta \leq \gamma} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds > \delta \right] = 0.$$

Demonstração: Denote por $D_+^N(t)$ como sendo o número de ξ -partículas que o sistema perde em \mathbb{N} até o tempo t , dividido por N . Definindo o martingal $M_+^N(t) = D_+^N(t) - N \int_0^t \xi_s(0) \xi_s(1) ds$ (ver apêndice), temos que

$$\mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds \right] \leq \mathbb{E}_{\mu^N}^N[|M_+^N(\tau + \theta) - M_+^N(\tau)|] + \mathbb{E}_{\mu^N}^N[|D_+^N(\tau + \theta) - D_+^N(\tau)|].$$

O primeiro termo do lado direito da desigualdade acima, aplicando Cauchy Schwarz, é

limitado por,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^N}^N [(M_+(\tau + \theta) - M_+(\tau))^2]^{1/2} &= \mathbb{E}_{\mu^N}^N [\langle M_+ \rangle_{\tau+\theta} - \langle M_+ \rangle_{\tau}]^{1/2} \\ &\leq C(G) \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} \xi_r(0) \xi_r(1) dr \right]^{1/2} \leq C(G) \sqrt{\theta},\end{aligned}$$

Para obter uma cota superior para o segundo termo, observe que pelo teorema de Helly Bray, como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\left| D_+^N(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta(t, u) - \zeta(0, u)) du \right| > \delta \right] = -0, \quad (3.8)$$

segue que, para cada M , $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^N}^N [D_+^N(t) \wedge M] = A \wedge M \leq A$, onde $A = \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta(t, u) - \zeta(0, u)) du$.

Além disso, $\lim_{M \rightarrow \infty} D_+^N(t) \wedge M = D_+^N(t)$, de forma crescente. Logo, pelo teorema da convergência monótona, $\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^N [D_+^N(t) \wedge M] = \mathbb{E}_{\mu^N}^N [D_+^N(t)]$, o que implica $\mathbb{E}_{\mu^N}^N [D_+^N(t)] \leq A$. Concluindo assim a primeira parte do lema.

Para concluir a demonstração do lema, observe que pela definição do martingal M_+^N

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\int_{\tau}^{\tau+\theta} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds > \delta \right] &\leq \mathbb{P}_{\mu^N}^N [|M_+^N(\tau + \theta) - M_+^N(\tau)| > \delta/2] + \\ &\quad + \mathbb{P}_{\mu^N}^N [|D_+^N(\tau + \theta) - D_+^N(\tau)| > \delta/2].\end{aligned}$$

O limite da primeira parte do lado direito da desigualdade acima vai a zero como podemos observar no início da demonstração da primeira parte do lema. A segunda parte converge em probabilidade a zero pelo lema A.3 no apêndice A.1. \square

Na seção seguinte mostraremos que os limites da sequência de medidas de probabilidade $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ são caracterizados como probabilidades concentradas em trajetórias de medidas que são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue.

3.1 Pontos limite de $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$

Mostraremos nesta seção que todos pontos limite de $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ são concentrados sobre caminhos absolutamente contínuos que são soluções fraca da equação (2.4).

Lema 3.2. *Existe uma função contínua de variação limitada D tal que, para cada função suave $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto e $\delta > 0$,*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \int_0^t \left\{ \frac{\sigma^2}{2} \langle \pi_s^N, \Delta G \rangle + \frac{\sigma^2}{2} \nabla_N G(0) a_s + \dot{D}(\langle \pi_s^N, H_1 \rangle - \langle \pi_s^N, H_2 \rangle) \right\} ds| > \delta \right] = 0,$$

onde $a_t = \zeta(t, 0+) - \zeta(t, 0-)$, $H_1(u) = \nabla G(u)I_{(-\infty, 0]}(u)$, $H_2(u) = \nabla G(u)I_{[1, +\infty)}(u)$ e $\sigma^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} p(i)i^2$.

Demonstração do Lema 3.2 Seja $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com suporte compacto. Pelas desigualdades de Chebyshev e de Doob, para $\delta > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^{G,N}| \geq \delta \right] &\leq \delta^{-2} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^{G,N}| \right)^2 \right] \leq \delta^{-2} 4 \mathbb{E}_{\mu^N}^N [(|M_T^{G,N}|)^2] \\ &= 4 \delta^{-2} \mathbb{E}_{\mu^N}^N [\langle M_T^{G,N} \rangle_T], \end{aligned}$$

a qual, pela fórmula explícita da variação quadrática de $M_t^{G,N}$, encontrada no apêndice C, é limitada por

$$\frac{C(G)}{N} \left(\theta + \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_0^T N \xi_s(0) \xi_s(1) ds \right] \right).$$

Portanto, pelo Lema 3.1, para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^{G,N}| \geq \delta \right] = 0. \quad (3.9)$$

Usando (3.5) para expandir a expressão martingal em (3.1) e já que a expansão de Taylor nos dá que

$$|N[G((x+1)/N) - G(x/N)] - \nabla G(x/N)| \leq \frac{C(G)}{N},$$

podemos substituir Δ_N e ∇_N em (3.9) pelos laplaciano e gradiente usuais, isto é,

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \int_0^t \{ \sigma^2 \langle \pi_s^N, \Delta G \rangle + \right. \\ & \left. \left[\sum_{i=1}^M ip(i) \left(\sum_{y=1}^i \xi(y) - \sum_{y=-i+1}^{-1} \xi(y) \right) \right] \nabla_N G(0) + \right. \\ & \left. + N \xi_s(0) \xi_s(1) (\langle \pi_s^N, H_1 \rangle - \langle \pi_s^N, H_2 \rangle) \} ds | > \delta \right] = 0, \end{aligned}$$

lembrando que $H_1(u) = \nabla G(u) I_{(-\infty, -1]}(u)$ e $H_2(u) = \nabla G(u) I_{[0, +\infty)}(u)$.

Na expressão anterior afirmamos que podemos obter o termo integral como uma função da medida empírica substituindo $N \xi_s(0) \xi_s(1)$ por \dot{D} , como em (2.4), e $\left(\sum_{y=1}^i \xi(y) - \sum_{y=-i+1}^{-1} \xi(y) \right)$ por $a_s = \zeta(t, 0+) - \zeta(t, 0-)$.

Consideraremos agora a substituição de $\xi(1)$ (as demais serão análogas).

Lema 3.3. *Para uma sequência de medidas iniciais $\{\mu^N, N \geq 1\}$ satisfazendo $(\widetilde{\mathbf{E1}}) - (\widetilde{\mathbf{E3}})$, temos para cada função continuamente diferenciável $H : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ que*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t H(s) \left[\xi_s(1) - \frac{1}{[\epsilon N]} \sum_{x=1}^{[\epsilon N]} \xi_s(x) \right] ds \right| \right\} = 0,$$

onde $[x]$ denota a parte inteira de x .

Nota: $\xi(1)$ pode ser substituído por $\sum_{y=1}^i \xi(y)$.

Demonstração: Já que

$$\int_0^t H(s) \left[\xi_s(1) - \frac{1}{[\epsilon N]} \sum_{x=1}^{[\epsilon N]} \xi_s(x) \right] ds$$

é uma família de funções indexadas por N que são uniformemente Lipschitz na variável t sobre $[0, T]$, podemos omitir o supremo no Lema. De fato, suponha válido o seguinte resultado

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\left| \int_0^t U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right] = 0, \quad (3.10)$$

onde $U_\epsilon^N(s, \xi) = H(s)V_\epsilon^N(\xi)$, $0 \leq s \leq t$, com $V_\epsilon^N(\xi) = \frac{1}{\epsilon N} \sum_{x=1}^{[\epsilon N]} (\xi(1) - \xi(x))$.

Particione o intervalo $[0, T]$ em intervalos de tamanhos $\delta = \frac{1}{k}$. Assim, defina $t_i = \frac{i}{k}$, $i = 1, \dots, Tk$, temos $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right] &= \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \pm \int_0^{t_i} U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\max_{1 \leq i \leq Tk} \left| \int_0^{t_i} U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_t^{t+1/k} U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right]. \end{aligned}$$

Aplicando o fato de $\int_0^t U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds$ ser uniformemente em N Lipchitz na variável t no primeiro termo do lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right] &\leq \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\max_{1 \leq i \leq Tk} \left| \int_0^{t_i} U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right] + C \frac{1}{k} \leq \\ &\leq Tk \max_{1 \leq i \leq Tk} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\left| \int_0^{t_i} U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right] + C \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Aplicando os limites $N \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ e depois $k \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima e usando (3.10), temos

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right] = 0,$$

como queríamos demonstrar.

Nota: Observe que

$$\left| U_\epsilon^N(t, \xi) - U_\epsilon^N(s, \xi) \right| \leq |V_\xi^N| |H(t) - H(s)| \leq 2 \sup_{0 \leq u \leq T} H'(u) |t - s|.$$

Na última desigualdade usamos o teorema do valor intermediário para H . Isso explica o porquê da família de funções serem uniformemente Lipchitz e, conseqüentemente, a obtenção de C .

Vamos então para a demonstração de (3.10). Pela desigualdade de entropia temos que a esperança em (3.10) é limitada por cima por

$$\frac{H(\mu^N | \nu_\alpha)}{A_N} + \frac{1}{A_N} \log \mathbb{E}_{\nu_\alpha}^N \left[\exp \left\{ \left| \int_0^t A_N U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right\} \right] \quad (3.11)$$

para cada A_N , onde ν_α é definido na seção 1.2.

Vamos estimar o segundo termo em (3.11). Já que $e^{|x|} \leq e^x + e^{-x}$ e $\limsup_N \frac{1}{N} \log\{a_N + b_N\} \leq \max\{\limsup_N \frac{1}{N} \log a_N, \limsup_N \frac{1}{N} \log b_N\}$, podemos ignorar o valor absoluto do expoente. Defina

$$(P_{s,t}^N f)(\xi) = \mathbb{E}_\xi^N \left[f(\xi_t) \exp \left\{ \int_s^t A_N U_\epsilon^N(s+r, \xi_r) dr \right\} \right],$$

para cada função limitada f sobre $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^*}$. Temos, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha}^N \left[\exp \left\{ \int_0^t A_N U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right\} \right] = \int (P_{0,t}^N 1) d\nu_\alpha \leq \left\{ \int (P_{0,t}^N 1)^2 d\nu_\alpha \right\}^{1/2}.$$

De modo a obter um limite superior para o termo do lado direito desta desigualdade mostraremos abaixo que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \partial_t \int (P_{0,t}^N 1)^2 d\nu_\alpha^N &\leq \left\{ \frac{\alpha^2}{2} + \left(\frac{BA_N}{2} - N^2 \right) \sup_f \mathcal{D}(f) + \right. & (3.12) \\ &\left. + \frac{\epsilon NA_N}{B} \|H\|_\infty^2 \right\} \int (P_{0,t}^N 1)^2 d\nu_\alpha, \end{aligned}$$

para todo $B > 0$, onde o supremo em f é tomado sobre todas as densidades com respeito a ν_α , $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma do supremo e $\mathcal{D}(f)$ a forma Dirichlet dada por: $-\int \sqrt{f} L \sqrt{f} d\nu_\alpha$.

Já que $H(\mu^N | \nu_\alpha) \leq CN$, para algum $C > 0$, segue de (3.12) e pela desigualdade de Gronwall que (3.11) é limitada por

$$\frac{CN}{A_N} + \left(\frac{\alpha^2}{2A_N} + \left(\frac{B}{2} - \frac{N^2}{A_N} \right) \sup_f \mathcal{D}(f) + \frac{\epsilon N}{B} \|H\|_\infty^2 \right) t.$$

Escolhendo $B = 2\sqrt{\epsilon}N$ e $A_N = \frac{N}{\sqrt{\epsilon}}$, teremos

$$\mathbb{E}_{\mu^N}^N \left\{ \left| \int_0^t U_\epsilon^N(s, \xi_s) ds \right| \right\} \leq \{C + \alpha^2 + 2^{-1} \|H\|_\infty^2\} \sqrt{\epsilon} t,$$

que vai a 0 quando $\epsilon \rightarrow 0$, provando o lema. \square

Demonstração de (3.12): Pela fórmula de Feynman-Kac, que pode ser obtida em [7]

na página 334, $\{P_{s,t} : 0 \leq s \leq t\}$ é um semigrupo de operadores associados a um gerador não homogêneo $L_s = N^2L + A_N U_\epsilon^N(s, \cdot)$. Além disso, a primeira equação de Chapman-Kolmogorov vale: $\partial_s P_{s,t} = -L_s P_{s,t}$. Daí

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\partial_s \int (P_{s,t}1)^2 d\nu_\alpha &= \int L_s(P_{s,t}1)P_{s,t}1 d\nu_\alpha = \int N^2 \sum_{i=1}^M L_{-i}(P_{s,t}1)P_{s,t}1 d\nu_\alpha + \\ &+ \int N^2 L_T(P_{s,t}1)P_{s,t}1 d\nu_\alpha + \int \{N^2 \sum_{i=1}^M L_i + A_N U_\epsilon^N(s, \cdot)\}(P_{s,t}1)P_{s,t}1 d\nu_\alpha. \end{aligned}$$

Estimaremos cada termo separadamente nesta expressão.

Afirmção 1: $\int (L_{-i}(P_{s,t}^N 1))P_{s,t}^N 1 d\nu_\alpha = 0$, $i = 1, 2, \dots, M$.

Demonstração: Denote $P_{s,t}^N 1$ por h . Temos que

$$\begin{aligned} \int (L_{-i}h)h d\nu_\alpha &= \sum_{x \leq -i} \int L_{x,x+i}hh d\nu_\alpha \\ &= \sum_{x \leq -i} \int \frac{1}{2} \{ \xi(x)(1 - \xi(x+i))[h(\xi^{x,x+i}) - h(\xi)] + \xi(x+i)(1 - \xi(x))[h(\xi^{x+i,x}) - h(\xi)] \} h(\xi) d\nu_\alpha. \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis: $\tilde{\xi} = \xi^{x,x+i}$, teremos $\nu_\alpha(\tilde{\xi}) = \nu_\alpha(\xi)$, seguindo assim o resultado. \square

Afirmção 2: $\int (L_T(P_{s,t}^N 1))P_{s,t}^N 1 d\nu_\alpha \leq \frac{\alpha^2}{2} \int (P_{s,t}^N 1)^2 d\nu_\alpha - \frac{1}{2} \int \xi(0)\xi(1)(P_{s,t}^N 1)^2(\xi)\nu_\alpha(d\xi)$.

Demonstração: Denote $(P_{s,t}^N 1)$ por h . Estamos considerando uma integral da forma

$$\int (L_T(h))h d\nu_\alpha = \int \xi(0)\xi(1)[h(\tau(\xi)) - h(\xi)]h(\xi) d\nu_\alpha.$$

Adicionando e subtraindo para este termo o termo

$$\frac{1}{2} \int \xi(0)\xi(1)h^2(\tau(\xi)) d\nu_\alpha = \frac{\alpha^2}{2} \int h^2(\zeta) d\nu_\alpha,$$

onde $\zeta = \tau(\xi)$, obteremos

$$\begin{aligned} \int (L_T(h))h d\nu_\alpha &= - \int \xi(0)\xi(1)[h^2(\xi) - h(\tau(\xi - \varrho_0 - \varrho_1))h(\xi) + \frac{1}{2}h^2(\tau(\xi - \varrho_0 - \varrho_1)) \\ &\quad - \frac{1}{2}h^2(\tau(\xi - \varrho_0 - \varrho_1))]d\nu_\alpha = -\frac{1}{2} \int \xi(0)\xi(1)[h(\xi) - h(\tau(\xi - \varrho_0 - \varrho_1))]^2 d\nu_\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \xi(0)\xi(1)h^2(\xi)d\nu_\alpha + \frac{1}{2} \int \xi(0)\xi(1)h^2(\tau(\xi - \varrho_0 - \varrho_1))d\nu_\alpha. \end{aligned}$$

O primeiro termo da soma anterior é negativo, logo pode ser negligenciado. Consequentemente,

$$\int (L_T(P_{s,t}^N))P_{s,t}^N d\nu_\alpha \leq \frac{\alpha^2}{2} \int h^2 d\nu_\alpha - \frac{1}{2} \int \xi(0)\xi(1)h^2(\xi)d\nu_\alpha.$$

Obtemos assim a afirmação 2. \square

Afirmação 3:

$$\begin{aligned} &\int \{N^2 \sum_{i=1}^M L_i + A_N U_\varepsilon^N(s, \cdot)\} (P_{s,t}^N \mathbf{1}) (P_{s,t}^N \mathbf{1}) d\nu_\alpha \leq \\ &\leq \left\{ \sup_f \left\{ \left(\frac{BA_N}{2} - N^2 \right) \mathcal{D}(f) \right\} + \epsilon \frac{NA_N}{B} \|H(u)\|_\infty^2 \right\} \int (P_{s,t}^N \mathbf{1})^2 d\nu_\alpha. \end{aligned}$$

Demonstração: Temos a estimativa

$$\int \{N^2 \sum_{i=1}^M L_i + A_N U_\varepsilon^N(s, \cdot)\} (P_{s,t}^N \mathbf{1}) P_{s,t}^N d\nu_\alpha \leq \Gamma_s^N \int (P_{s,t}^N \mathbf{1})^2 d\nu_\alpha,$$

onde Γ_s^N é o maior autovalor do gerador $N^2 \sum_{i=1}^M L_i + A_N U_\varepsilon^N(s, \cdot)$. Pela fórmula variacional, ver apêndice de [7] Γ_s^N é igual a

$$\sup_f \left\{ \int A_N U_\varepsilon^N(s, \xi) f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) - N^2 \mathcal{D}(f) \right\}, \quad (3.13)$$

onde f é densidade com respeito a ν_α . Se mostrarmos que

$$\left| \int V_\varepsilon^N(\xi) f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) \right| \leq \frac{B}{2} \mathcal{D}(f) + \frac{\epsilon N}{B}, \quad (3.14)$$

para qualquer B , então substituindo B por $\frac{B}{|H(s)|}$ concluímos a demonstração da afirmação

3. O lado esquerdo em (3.14) sem o valor absoluto é igual a

$$\frac{1}{\epsilon N} \sum_{x=1}^{[\epsilon N]} \int [\xi(1) - \xi(x)] f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) = 2 \frac{1}{\epsilon N} \sum_{x=1}^{[\epsilon N]} \sum_{i=1}^M \sum_{y=1}^{x-i} \int p(i) [\xi(y) - \xi(y+i)] f(\xi) \nu_\alpha(d\xi)$$

que pode ser reescrita, fazendo uma mudança de variável, como

$$\begin{aligned} & 2 \frac{1}{\epsilon N} \sum_{x=1}^{[\epsilon N]} \sum_{i=1}^M \sum_{y=1}^{x-i} p(i) \left\{ \int \xi(y) [1 - \xi(y+i)] f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) - \int \xi(y+i) [1 - \xi(y)] f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) \right\} \\ &= 2 \frac{1}{\epsilon N} \sum_{x=1}^{[\epsilon N]} \sum_{i=1}^M \sum_{y=1}^{x-i} p(i) \int \xi(y+i) [1 - \xi(y)] \{f(\xi^{y,y+i}) - f(\xi)\} \nu_\alpha(d\xi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto, escrevendo $f(\xi^{y,y+i}) - f(\xi)$ como $\{\sqrt{f(\xi^{y,y+i})} - \sqrt{f(\xi)}\} \{\sqrt{f(\xi^{y,y+i})} + \sqrt{f(\xi)}\}$ e aplicando a desigualdade elementar $2|ab| \leq Ba^2 + B^{-1}b^2$, que vale para cada a, b e $B > 0$, temos que o valor absoluto da expressão anterior é limitado por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[\epsilon N]} \sum_{x=1}^{\epsilon N} \sum_{i=1}^M \sum_{y=1}^{x-i} p(i) \left\{ \frac{B}{2} \int \xi(y+i) [1 - \xi(y)] \{\sqrt{f(\xi^{y,y+i})} - \sqrt{f(\xi)}\}^2 \nu_\alpha(d\xi) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B^{-1}}{2} \int \xi(y+i) [1 - \xi(y)] \{\sqrt{f(\xi^{y,y+i})} + \sqrt{f(\xi)}\}^2 \nu_\alpha(d\xi) \right\} \\ & \leq \frac{B}{2} \mathcal{D}(f) + \frac{B^{-1}}{\epsilon N} \sum_{x=1}^{\epsilon N} \sum_{i=1}^M \sum_{y=1}^{x-i} p(i) \int (f(\xi^{y,y+i}) + f(\xi)) \nu_\alpha(d\xi) \leq \frac{B}{2} \mathcal{D}(f) + \frac{\epsilon N}{B}. \end{aligned}$$

Isto mostra (3.14). \square

Observe que (3.12) é uma consequência das afirmações 1 a 3. Concluindo assim a demonstração do Lema 3.3. \square

Falta mostrar que existe uma função D de variação limitada tal que será possível a substituição de $N\xi(0)\xi(1)$ por \dot{D} . O próximo lema ajudará na obtenção de tal função.

Denote por $D_+^N(t)$ (respectiv. $D_-^N(t)$) o número de partículas que o sistema perde em \mathbb{N} (respectiv. \mathbb{Z}_-) até o instante t dividido por N .

Lema 3.4. *Fixe uma função suave G definida em $C_0^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ e $\delta > 0$. Então,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t ds \left\{ N\xi_s(0)\xi_s(1) - \frac{D_+^N(s+\epsilon) - D_+^N(s)}{\epsilon} \right\} \langle \pi_s^N, G_s \rangle \right| > \delta \right] = 0.$$

Demonstração: Denote por $M_+^N(t) = D_+^N(t) - N \int_0^t \xi_s(0)\xi_s(1)ds$.

É fácil mostrar que M_+^N é um martingal com variação quadrática $\langle M_+^N \rangle_t$ dada por $\int_0^t \xi_s(0)\xi_s(1)ds$. Podemos portanto escrever $\epsilon^{-1}\{D_+^N(s+\epsilon) - D_+^N(s)\}$ como

$$\frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} + \frac{N}{\epsilon} \int_s^{s+\epsilon} \xi_r(0)\xi_r(1)dr.$$

A parte martingal é fácil estimar porque é zero no limite (em probabilidade) quando $N \uparrow \infty$ (ver Lema A.3 no Apêndice A). Além disso, observe que

$$\left| \int_0^t \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \langle \pi_s^N, G \rangle ds \right| \leq \frac{C(G)}{\epsilon} \left\{ \int_0^t |M_+^N(s+\epsilon)| ds + \int_0^t |M_+^N(s)| ds \right\}$$

mudando a variável para $u = s + \epsilon$ na primeira integral, teremos

$$\int_0^t |M_+^N(s+\epsilon)| ds = \int_0^{t+\epsilon} |M_+^N(u)| du.$$

Por outro lado $\int_0^t |M_+^N(s)| ds \leq \int_0^{t+\epsilon} |M_+^N(s)| ds$. Consequentemente,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \langle \pi_s^N, G \rangle ds \right| \leq \frac{C(G)}{\epsilon} 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \int_0^{t+\epsilon} |M_+^N(s)| ds \right\}.$$

Então pela desigualdade de Markov e observando a desigualdade anterior obteremos

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \langle \pi_s^N, G \rangle ds \right| > \delta \right] \\ & \leq \frac{1}{\delta} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \langle \pi_s^N, G \rangle ds \right| \right] \leq 2 \frac{C(G)}{\delta \epsilon} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_0^{T+\epsilon} |M_+^N(s)| ds \right]. \end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Schwarz,

$$\frac{C(G)}{\delta \epsilon} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left[\int_0^{T+\epsilon} |M_+^N(s)| ds \right] \leq \frac{C(G)}{\delta \epsilon} \sqrt{T+\epsilon} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left\{ \left[\int_0^{T+\epsilon} |M_+^N(s)|^2 ds \right]^{1/2} \right\}$$

Usando novamente a desigualdade de Schwarz, o Teorema de Fubini e observando que

que $\mathbb{E}[M_+^N(s)^2] = \mathbb{E}[\langle M_+^N \rangle_s]$, a expressão acima fica limitada por

$$\frac{C(G)}{\delta\epsilon} \sqrt{T + \epsilon} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left\{ \left[\int_0^{T+\epsilon} \langle M_+^N(s) \rangle ds \right]^{1/2} \right\} \leq \frac{C(G)}{\delta\epsilon} \sqrt{T + \epsilon} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left\{ \left[\int_0^{T+\epsilon} \xi_s(0)\xi_s(1) ds \right]^{1/2} \right\},$$

onde $C(G)$ é constante finita dependendo somente de G . Portanto,

$$\mathbb{Q}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \frac{M_+^N(s + \epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \langle \pi_s^N, G \rangle ds \right| > \delta \right] \leq \frac{C(G, T)}{\delta\epsilon} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left\{ \left[\int_0^{T+\epsilon} \xi_s(0)\xi_s(1) ds \right]^{1/2} \right\}.$$

Pelo lema 3.1 temos que $\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left\{ \left[\int_0^{T+\epsilon} \xi_s(0)\xi_s(1) ds \right] \right\} < \infty$, logo a expressão acima vai a zero quando $N \uparrow \infty$.

Resta considerar a diferença $N\xi_s(0)\xi_s(1) - N \int_s^{s+\epsilon} \xi_r(0)\xi_r(1) dr$.

Primeiro realizamos a integração por partes no tempo para obter que

$$\left| \int_0^t ds \left\{ N\xi_s(0)\xi_s(1) - \frac{N}{\epsilon} \int_s^{s+\epsilon} dr \xi_r(0)\xi_r(1) \right\} \langle \pi_s^N, G_s \rangle \right| \leq C(G) \left\{ \int_0^\epsilon ds N\xi_s(0)\xi_s(1) + \int_t^{t+\epsilon} ds N\xi_s(0)\xi_s(1) \right\} + \left| \int_\epsilon^t ds N\xi_s(0)\xi_s(1) \left\{ \langle \pi_s^N, G_s \rangle - \frac{1}{\epsilon} \int_{s-\epsilon}^s \langle \pi_r^N, G_r \rangle dr \right\} \right|.$$

Novamente, por 3.1 permite estimar o primeiro termo do lado direito. Para estimar o segundo, escreva a diferença $\langle \pi_s^N, G_s \rangle - \langle \pi_r^N, G_r \rangle$ como

$$M_s^{G, N} - M_r^{G, N} + \int_r^s (\partial_\nu + N^2 L) \langle \pi_\nu^N, G_\nu \rangle d\nu.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_\epsilon^t ds N\xi_s(0)\xi_s(1) \frac{1}{\epsilon} \int_{s-\epsilon}^s dr \{ M_s^{G, N} - M_r^{G, N} \} \right| > \delta \right] \\ \leq \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T+\epsilon} |M_t^{G, N}| \int_0^T N\xi_s(0)\xi_s(1) ds > \frac{\delta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Fixe $\gamma > 0$. Pela equação (3.7), existe uma constante finita A para a qual

$$\mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\int_0^T N\xi_s(0)\xi_s(1) ds > A \right] \leq \gamma \text{ para todo } N \geq 1.$$

Entretanto, a probabilidade anterior é menor do que ou igual a

$$\gamma + \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T+\epsilon} |M_t^{G,N}| > \frac{\delta}{2A} \right]$$

Segue de (3.9) que esta expressão é limitada por γ quando $N \uparrow \infty$. Isto prova que (3.16) é zero no limite quando $N \uparrow \infty$. Resta mostrar que

$$\mathbb{P}_{\mu^N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{\epsilon}^t ds N \xi_s(0) \xi_s(1) \frac{1}{\epsilon} \int_{s-\epsilon}^s dr \int_r^s (\partial_\nu + N^2 L) \langle \pi_\nu^N, G_\nu \rangle d\nu \right| > \delta \right] \quad (3.17)$$

é zero quando $N \uparrow \infty$ e $\epsilon \downarrow 0$.

Pela expressão explícita para $(\partial_\nu + N^2 L) \langle \pi_\nu^N, G_\nu \rangle$ dada em (3.5), temos que o valor absoluto da integral nesta fórmula é dominado por

$$C(G) \int_0^T N \xi_s(0) \xi_s(1) ds \left\{ \epsilon + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_t^{t+\epsilon} N \xi_s(0) \xi_s(1) ds \right\}.$$

Logo, (3.17) vai a zero no limite quando $N \uparrow \infty$ e $\epsilon \downarrow 0$. Isto conclui a demonstração do lema. \square

3.2 Unicidade de soluções fracas da equação (2.4)

O problema de Stefan. Fixe duas funções mensuráveis $u_{10} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $u_{20} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e considere o problema de Stefan

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u_1(t, x), & t \in [0, T], x > D_t(t), \\ \partial_t u_2(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u_2(t, x), & t \in [0, T], x > D_t(t), \\ u_1(t, x) = u_2(t, x) = 0, & 0 \leq x < D_t, \\ u_1(t, D_t) u_2(t, D_t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ \dot{D}_t = \partial_x u_1(t, D_t+) = \partial_x u_2(t, D_t+), & \\ u_1(0, x) = u_{10}(x), & \\ u_2(0, x) = u_{20}(x). & \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Denote $\mathbb{R} - \{0\}$ por \mathbb{R}^* . Uma solução fraca de (3.18) é um par de funções mensuráveis $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ que satisfaz: para cada $F \in C_0^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^*)$ e $F(t, 0) = F(T, x) = 0$, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{D_t}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (u_1(t, x) + u_2(t, x)) \Delta F(t, x) + (u_1(t, x) + u_2(t, x)) \partial_t F(t, x) \right] dx dt + \\ & + \int_0^{+\infty} (u_1(0, x) + u_2(0, x)) F(0, x) dx - \frac{1}{2} \int_0^T (u_1(t, D_t) + u_2(t, D_t)) \partial_x F(t, D_t) dt = 0. \end{aligned}$$

O lema abaixo mostra que soluções fracas de (3.18) podem ser obtidas por uma simples mudança de variáveis das soluções fracas de (2.4). Em particular, a unicidade de (2.4) segue da unicidade de (3.18).

Lema 3.5. *Seja ζ uma solução fraca de (2.4) e seja $u_1(t, x) = \zeta(t, x - D_t)$ e $u_2(t, x) = \zeta(t, (-x - D_t))$. Então (u_1, u_2) é uma solução fraca de (3.18).*

Demonstração: Provaremos para $x \in \mathbb{R}^+$, o outro lado é análogo. Seja ζ uma solução fraca de (2.4) e $G \in C_0^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$, $G(T, x) = G(t, 0) = 0$ para todo x . Então temos que ζ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}^+} \zeta(s, u) \partial_s G(s, u) du + \frac{1}{2} \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}^+} \zeta(s, u) \Delta G(s, u) du \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} \dot{D}_s \zeta(s, u) \partial_u G(s, u) du ds + \int_{\mathbb{R}^+} du G(0, u) \zeta_0(u) - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta(s, 0) \partial_u G(s, 0) ds = 0, \end{aligned}$$

onde $\dot{D}_s = \partial_s D_s$. Fazendo a mudança de variável $u' = u + D_t$ e considerando a suavidade de D_t , a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \int_0^T ds \int_{D_s}^{+\infty} \zeta(s, u' - D_s) \partial_s G(s, u' - D_s) du' - \int_0^T ds \int_{D_s}^{+\infty} \zeta(s, u' - D_s) \partial_s D_s \partial_u G(s, u' - D_s) du' \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T ds \int_{D_s}^{+\infty} \zeta(s, u' - D_s) \Delta G(s, u' + D_t) du' + \int_0^T \int_{D_s}^{+\infty} \dot{D}_s \zeta(s, u' - D_s) \partial_u G(s, u' - D_s) du' ds \\ & + \int_{D_0}^{+\infty} G(0, u' - D_0) \zeta_0(u' - D_0) du' - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta(s, D_s) \partial_u G(s, D_s) ds = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $H(t, x) = G(t, x - D_t)$, segue que H é suave, tem suporte compacto, se anula em $x = D_t$ e em $t = T$. Com isso a expressão acima é então da forma

$$\begin{aligned} & \int_0^T ds \int_{D_s}^{+\infty} u(s, x') \partial_s H(s, x') dx' + \frac{1}{2} \int_0^T ds \int_{D_s}^{+\infty} u(s, x') \Delta H(s, x') dx' \\ & + \int_{D_0}^{+\infty} H(0, x') u_0(x') dx' - \frac{1}{2} \int_0^T u(s, D_s) \partial_x H(s, D_s) ds = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, sob a hipótese de suavidade, u como dada no lema, é solução fraca de (3.18), como queríamos.

Vamos agora considerar D_t^ϵ aproximação uniforme suave de D_t tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} |D_t^\epsilon - D_t| = 0. \quad (3.19)$$

Fixe uma função suave $G : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto que se anula em $t = T$ e também em $x = 0$. Seja $H^\epsilon(t, x) = G(t, x - D_t^\epsilon)$. Consequentemente H^ϵ é uma função suave com suporte compacto. Entretanto, já que ζ é uma solução fraca de (2.4) e já que $G(T, \cdot) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle \zeta_T, G(T, x + D_T^\epsilon) \rangle &= \langle \zeta_T, H_T^\epsilon \rangle = \langle \zeta_0, H_0^\epsilon \rangle + \int_0^T ds \langle \zeta_s, (\partial_s + \frac{1}{2} \Delta) H_s^\epsilon \rangle \\ &+ \int_0^T \langle \zeta_s, \partial_x H_s^\epsilon \rangle dD_s - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta(s, 0) \partial_x H^\epsilon(s, D_s) ds. \end{aligned}$$

Abrindo o segundo termo do lado esquerdo da última igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \zeta_0, H_0^\epsilon \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T ds \langle \zeta_s, \Delta H_s^\epsilon \rangle + \int_0^T \langle \zeta_s, \partial_s H_s^\epsilon \rangle ds - \int_0^T \langle \zeta_s, \partial_x H_s^\epsilon \rangle \partial_s D_s^\epsilon \\ + \int_0^T \langle \zeta_s, \partial_x H_s^\epsilon \rangle dD_s - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta(s, D_s) \partial_x H^\epsilon(s, D_s^\epsilon) ds. \end{aligned}$$

Conseqüentemente teremos quando $\epsilon \rightarrow 0$, olhando a definição de ζ dada na hipótese do lema,

$$0 = \langle u_0, F_0 \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T ds \langle u_s, \Delta F \rangle + \int_0^T \langle u_s, \partial_s F \rangle ds - \frac{1}{2} \int_0^T u(s, D_s) \partial_x F(s, D_s) ds,$$

como queríamos. \square

Pelo Lema 3.5, temos que unicidade para a equação (3.18) implica na unicidade para a equação (2.4). Antes de considerar (3.18) vamos considerar uma outra equação auxiliar. Fixe uma função mensurável $u_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e considere o problema Stefan

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x), & t \in [0, T], x > D_t \\ u(t, x) = 0, & 0 \leq x \leq D_t \\ D_t = \partial_x u(t, D_t+) \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.20)$$

Provamos a unicidade de (3.20) com uma extensão do argumento apresentado capítulo 7 em [8]. Uma solução fraca de (3.20) é uma função mensurável $u(t, x)$ que satisfaz: para cada $F \in C_0^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^*)$ e $F(t, 0) = F(T, x) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{D_t}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} u(t, x) \Delta F(t, x) + u(t, x) \partial_t F(t, x) \right] dx dt + \int_{D_0}^{+\infty} u_0(x) F(0, x) dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^T u(t, D_t) \partial_x F(t, D_t) dt = 0. \end{aligned}$$

Demonstração da unicidade para (3.20):

Denote $\partial_t F$ por F_t e ΔF por F_{xx} . Mostraremos a unicidade para soluções fracas da EDP acima. De fato, suponha que u_1 e u_1^* são duas soluções para o problema de Stefan com as condições dadas acima. Então, subtraindo a identidade integral para v da

integral para u , observando as condições dadas para F, u_1 e u_1^* , obtemos

$$\int_0^T \int_{D_t}^{+\infty} [u_1^*(t,x) - u_1(t,x)] \{F_t(t,x) + F_{xx}(t,x)\} dx dt = 0 \quad (3.21)$$

Se para uma função infinitamente diferenciável $\Phi(x)$ tal que $\Phi(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0$, existe uma solução para equação

$$F_t(t,x) - F_{xx}(t,x) = \Phi(x),$$

contínua no fecho do domínio D de F e satisfazendo as condições de fronteira de F , então a partir de (3.21)

$$\int_0^T \int_{D_t}^{+\infty} (u_1^*(t,x) - u_1(t,x)) \Phi(x) dx dt = 0 \quad (3.22)$$

Já que o conjunto de tais Φ é denso em $L_2(D)$, segue a partir de (3.22) que $u_1^* = u_1$, *qtp*.

□

Antes de demonstrarmos a unicidade da equação (2.4), enunciamos e provamos o seguinte Lema.

Lema 3.6. *Todo ponto limite de $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ está concentrado em soluções ζ tais que se $\zeta(s, 0-) > 0$, para $s > 0$, então existe $\gamma > 0$ tal que $\zeta(t, 0-) > 0$ para cada $t \in [s, s + \gamma]$.*

Observe que $s > 0$ e $\zeta(s, 0-) > 0$ implica que $\zeta(s, 0+) = 0$.

Demonstração: Seja $M_t^\epsilon = \int_{-\epsilon}^0 \zeta(t, u) du$. Logo, $M_t^\epsilon \approx \epsilon(\zeta(t, 0-) + \dot{D}_t \epsilon / 2)$, para todo $t > 0$. Consequentemente, $\frac{M_t^\epsilon - M_s^\epsilon}{\epsilon} \approx (\zeta(t, 0-) - \zeta(s, 0-)) + \frac{\dot{D}_t - \dot{D}_s}{2} \epsilon$. Se $\lim_{t \downarrow s} M_t^\epsilon = M_s^\epsilon$ então

$$\epsilon \zeta(t, 0-) + \epsilon^2 \frac{\dot{D}_t}{2} \rightarrow \epsilon \zeta(s, 0-) + \epsilon^2 \frac{\dot{D}_s}{2} \text{ para todo } t > s.$$

Usando este resultado, supondo $\zeta(t, 0-) = 0$ para todo t suficientemente próximo de s , teremos $\epsilon^2 \frac{\dot{D}_t}{2} \rightarrow \epsilon \zeta(s, 0-) + \epsilon^2 \frac{\dot{D}_s}{2}$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, uma contradição, pois um termo de ordem ϵ^2 vai a zero mais rápido que o de ordem ϵ . Aqui usamos o fato de \dot{D}_t ser limitada em $[s, T]$ para $s > 0$, $T > s$. Para isto, lembre que $D_t - D_s$ é o limite em probabilidade de $D_t^N - D_s^N$ e usando estimativas como nos capítulos anteriores pode-se

verificar que $D_t - D_s$ é Lipschitz. Isto não vale em $(0, T]$, de fato podemos ter $D_t \equiv \sqrt{t}$ e \dot{D}_t não limitada em $(0, T]$.

Desta forma, para concluir a demonstração do Lema, falta verificar que $\lim_{t \downarrow s} M_t^\epsilon = M_s^\epsilon$. De fato, temos que

$$M_t^\epsilon - M_s^\epsilon \leq D_+^\zeta(t) - D_+^\zeta(s) + F_\epsilon(t - s),$$

onde $D_+^\zeta(t)$ é como definido no Apêndice A.1 e $F_\epsilon(t - s)$ é o fluxo de massa macroscópico em $x = -\epsilon$.

Uma cota superior para $F_\epsilon(t - s)$ é dada pelo limite em escala difusiva da quantidade de partículas que deixam um sistema em $x = -\epsilon$ ($D_+^N(t)$), no qual este sistema é um processo de exclusão simples e simétrico com fronteira $x = -\epsilon$, onde partículas quando chegam em $x = -\epsilon$ deixam o sistema com tempo exponencial de taxa 1. Este processo é bem conhecido, como podemos observar no Teorema 2.1 em [9] e na Proposição 5.2 em [10]. Logo $D_+^N(t) - D_+^N(s)$ será limitado por uma constante vezes $t - s$. Desta forma teremos o resultado desejado. \square

Para mostrar a unicidade do lado direito do processo de exclusão, supondo que $\exists T$ tal que $u_1(s, D_t) = u_1^*(s, D_t) = 0$, para $s \in (0, T)$. Logo, por (3.20), $u_1 = u_1^*$.

Para mostrar a unicidade do lado esquerdo do processo, consideraremos a equação original (2.4). Sejam u_2 e u_2^* duas soluções da equação (2.4), com as mesmas condições iniciais. Logo $\omega = u_2 - u_2^*$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} \partial_t \omega = \sigma^2 \Delta \omega + \dot{D}_t \partial_x \omega, & x < 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(t, x) = 0 \partial_x \omega(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ \omega(0, x) = 0, & x < 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

onde $\dot{D}_t = \partial_x u_1(t, D_t+)$. Esta é uma equação linear parabólica na semi-reta com condição mista na fronteira que pode ser encontrada, por exemplo, no Teorema 7 de [2].

3.2.1 Uma estimativa de energia

O próximo resultado justifica a integração por partes na expressão que aparece no interior da probabilidade do Lema 3.2, provando o Teorema 3.5 sob a condição **(E3)**.

Teorema 3.7. *Cada ponto limite de $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ é concentrado sobre caminhos $\zeta(s, u)du$ com a propriedade que $\zeta(s, u)$ é absolutamente contínuo com respeito a Lebesgue com derivada $\partial_u \zeta(s, u)$ em $L^2([0, T] \times \mathbb{R})$. Além disso*

$$\begin{aligned} & \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}} du H(s, u) \partial_u \zeta(s, u) = \\ & = - \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}} du \partial_u H(s, u) \zeta(s, u) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T ds H(s, 0) \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{-\epsilon}^0 \zeta(s, u) - \int_0^{\epsilon} \zeta(s, u) \right]. \end{aligned}$$

para todas funções suaves $H : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto.

Notação : Denote por $C_0^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas com suporte compacto sobre $[0, T] \times \mathbb{R}$ que são continuamente diferenciáveis na segunda variável e considere este espaço dotado da norma

$$\begin{aligned} \| H \|_{0,1} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \{ \| H \mathbf{1}\{(n, n+1)\} \|_{\infty} + \| \partial_u H \mathbf{1}\{(n, n+1)\} \|_{\infty} \} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n} \{ \| H \mathbf{1}\{(n-1, n)\} \|_{\infty} + \| \partial_u H \mathbf{1}\{(n-1, n)\} \|_{\infty} \}. \end{aligned}$$

Para provar o teorema anterior usaremos a seguinte estimativa de energia:

Lema 3.8. *Existe $K > 0$ tal que se \mathbb{Q}^* é um ponto limite da sequência $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$ então*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left[\sup_H \left\{ \int_0^T ds \left\{ \int_{\mathbb{R}} du \partial_u H(s, u) \zeta(s, u) + H(s, 0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{-\epsilon}^0 \zeta(s, u) - \int_0^{\epsilon} \zeta(s, u) \right] \right\} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}} du H^2(s, u) \zeta(s, u) \right\} \right] \leq K, \end{aligned}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções H em $C_0^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R})$.

Demonstração: Para cada $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função suave com suporte compacto e $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, denote por $W_N(\epsilon, \delta, G, \xi)$ a seguinte expressão

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} G(x/N) \frac{1}{\epsilon N} \{ \xi^{\delta N}(x) - \xi^{\delta N}(x + [\epsilon N]) \} - \frac{2}{N} \sum_{x=-\infty}^{\infty} G^2(x/N) \frac{1}{\epsilon N} \sum_{y=0}^{[\epsilon N]} \xi^{\delta N}(x + y),$$

$$\xi^\delta(x) = \delta^{-1} \sum_{y=x}^{x+\delta} \xi(y).$$

Afirmamos que existe $K > 0$ tal que para qualquer subconjunto denso $\{H_l : l \geq 1\}$ de $C_0^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R})$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^N} \left[\max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \int_0^T ds W_N(\epsilon, \delta, H_i(s, \cdot), \xi_s) \right\} \right] \leq K, \quad (3.24)$$

para cada $k \geq 1$ e cada $\epsilon > 0$. Deixamos a demonstração de 3.24 para depois. Usando este resultado, já que \mathbb{Q}^* é um ponto limite fraco de $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$, segue que

$$\begin{aligned} & \limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left[\max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \int_0^T ds \left\{ \int_{\mathbb{R}} du \epsilon^{-1} H_i(s, u) \left(\delta^{-1} \int_u^{u+\delta} \zeta(s, v) dv - \delta^{-1} \int_{u+\epsilon}^{u+\epsilon+\delta} \zeta(s, v) dv \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 2\epsilon^{-1} - 2H_i^2(s, u) \int_u^{u+\epsilon} dv \left(\delta^{-1} \int_v^{v+\delta} \zeta(s, v') dv' \right) \right\} \right\} \right] \leq K, \end{aligned} \quad (3.25)$$

para cada $k \geq 1$. Como temos

$$\epsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} du H_i(s, u) \left(\delta^{-1} \int_u^{u+\delta} \zeta(s, v) dv - \delta^{-1} \int_{u+\epsilon}^{u+\epsilon+\delta} \zeta(s, v) dv \right)$$

igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_i(s, u) - H_i(s, u - \epsilon)}{\epsilon} \right\} \left\{ \delta^{-1} \int_u^{u+\delta} \zeta(s, v) dv \right\} + \epsilon^{-1} \int_0^\epsilon \left\{ \delta^{-1} \int_u^{u+\delta} \zeta(s, v) dv \right\},$$

considerando $\delta \rightarrow 0$ e então $\epsilon \rightarrow 0$, segue de (3.25) que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left[\max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}_+} du \{ \partial_u H_i(s, u) \zeta(s, u) - 2H_i^2(s, u) \zeta(s, u) \} + \right. \right. \\ & \left. \left. + H(s, 0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \zeta(s, u) du \right\} \right] \leq K \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração aplicamos o teorema da convergência monótona, observando que

$$\int_0^T ds \int_{\mathbb{R}_+} du \{ \partial_u H_i(s, u) \zeta(s, u) - 2H_i^2(s, u) \zeta(s, u) \} + H(s, 0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \zeta(s, u) du$$

é contínua como uma função real sobre $C_0^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R}_+)$. \square

Demonstração de (3.24): Já que H é uma função contínua, uma integração por partes justifica a substituição de $W_N(\epsilon, \delta, H, \xi)$ quando $\delta \rightarrow 0$ em (3.24) por

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} H(x/N) \frac{1}{\epsilon N} \{\xi(x) - \xi(x + [\epsilon N])\} - \frac{2}{N} \sum_{x=-\infty}^{\infty} H^2(x/N) \frac{1}{\epsilon N} \sum_{y=1}^{[\epsilon N]} \xi(x+y), \quad (3.26)$$

que denotaremos por $W_N(\epsilon, H, \xi)$. Pela desigualdade de entropia

$$\mathbb{E}_{\mu^N} \left[\max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \int_0^T ds W_N(\epsilon, H_i(s, \cdot), \xi_s) \right\} \right]$$

é limitada por

$$\frac{H(\mu^N | \nu_\alpha)}{N} + \frac{1}{N} \log \mathbb{E}_{\nu_\alpha}^N \left[\exp \left\{ N \max_{1 \leq i \leq k} \int_0^T ds W_N(\epsilon, H_i(s, \cdot), \xi_s) \right\} \right].$$

As hipóteses (E3) e a desigualdade elementar $\exp\{\max a_i\} \leq \sum \exp\{a_i\}$ implicam que esta última expressão é limitada por

$$C + \frac{1}{N} \log \mathbb{E}_{\nu_\alpha}^N \left[\sum_{i=1}^k \exp \left\{ N \int_0^T ds W_N(\epsilon, H_i(s, \cdot), \xi_s) \right\} \right].$$

Aqui, já que $\max\{\limsup_N N^{-1} \log a_N, \limsup_N N^{-1} \log b_N\}$ é menor ou igual a $\limsup_N N^{-1} \log\{a_N + b_N\}$, o segundo termo é dominado por

$$\max_{1 \leq i \leq k} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}_{\nu_\alpha}^N \left[\exp \left\{ N \int_0^T ds W_N(\epsilon, H_i(s, \cdot), \xi_s) \right\} \right]. \quad (3.27)$$

Analogamente a demonstração do Lema 3.3, temos que a expressão anterior é limitada por

$$\max_{1 \leq i \leq k} \int_0^T ds \sup_f \left\{ \int W_N(\epsilon, H_i(s, \cdot), \xi) f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) - ND(f) \right\} + \frac{\alpha^2}{2}, \quad (3.28)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as densidades cilíndricas f com respeito a ν_α , e

$$\begin{aligned} D(f) &= - \int \sqrt{f} L \sqrt{f} d\nu_\alpha \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, z \in \mathbb{Z}} p(z) \int \xi(x) [1 - \xi(x+z)] [\sqrt{f(\xi^{x, x+z})} - \sqrt{f(\xi)}]^2 d\nu_\alpha \end{aligned}$$

é a forma de Dirichlet avaliada em f . Assumimos (3.28) e mostraremos esta após a demonstração de (3.24). Ainda temos que estimar o primeiro termo em (3.28) cujo lim sup quando $N \rightarrow \infty$ mostraremos agora que é de fato não positivo. Escreva

$$\begin{aligned} & \int \{\xi(x) - \xi(x + [\epsilon N])\} f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) = \\ & = 2 \sum_{z \geq 1} p(z) \sum_{j=0}^{[z^{-1}\epsilon N]-1} \int \{\xi(x + jz) - \xi(x + (j+1)z)\} f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) \\ & \quad + 2 \sum_{z \geq 1} p(z) \int \{\xi(x + [z^{-1}\epsilon N]z) - \xi(x + [\epsilon N])\} f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) \end{aligned}$$

onde o primeiro termo no lado direito pode ser reescrito como

$$2 \sum_{z \geq 1} p(z) \sum_{j=0}^{[z^{-1}\epsilon N]-1} \int \xi(x + (j+1)z) [1 - \xi(x + jz)] \{f(\xi^{x+jz, x+(j+1)z}) - f(\xi)\} \nu_\alpha(d\xi).$$

Portanto, escrevendo $f(\xi^{x+jz, x+(j+1)z}) - f(\xi)$ como $\{\sqrt{f(\xi^{x+jz, x+(j+1)z})} - \sqrt{f(\xi)}\} \{\sqrt{f(\xi^{x+jz, x+(j+1)z})} + \sqrt{f(\xi)}\}$ e aplicando a desigualdade elementar $2|ab| \leq Ba^2 + B^{-1}b^2$, que vale para cada a, b e $B > 0$, temos que

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} H(s, x/N) \int \{\xi(x) - \xi(x + [\epsilon N])\} f(\xi) \nu_\alpha(d\xi)$$

é para cada $B > 0$, limitado acima por

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} B \sum_{z \geq 1} p(z) \sum_{j=0}^{[z^{-1}\epsilon N]-1} \int \xi(x + (j+1)z) [1 - \xi(x + jz)] \{\sqrt{f(\xi^{x+jz, x+(j+1)z})} - \sqrt{f(\xi)}\}^2 \nu_\alpha(d\xi) \\ & \quad + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{H(s, x/N)^2}{B} \sum_{z \geq 1} p(z) \sum_{j=0}^{[z^{-1}\epsilon N]-1} \int \xi(x + (j+1)z) [1 - \\ & \quad - \xi(x + jz)] \{\sqrt{f(\xi^{x+jz, x+(j+1)z})} + \sqrt{f(\xi)}\}^2 \nu_\alpha(d\xi) + O(1) \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão anterior por $(\epsilon N)^{-1}$, ela fica limitada por

$$BD(f) + \frac{2}{B} \sum_{-\infty}^{\infty} H(s, x/N)^2 \frac{1}{\epsilon N} \sum_{y=0}^{[\epsilon N]} \int \xi(x + y) f(\xi) \nu_\alpha(d\xi) + O((\epsilon N)^{-1}).$$

Tomando $B = N$ obtemos a partir de (3.26) que

$$\int W_N(\epsilon, H(s, \cdot, \xi) f(\xi) \nu_{\alpha(d\xi) \leq ND(f) + O((\epsilon N)^{-1})}.$$

Portanto, o limite superior quando $N \rightarrow \infty$ do primeiro termo em (3.28) é não positiva e (3.27) é limitada por $\frac{\alpha^2}{2}$. \square Então concluímos a prova de (3.24) obtendo $k = \alpha^2/2$.

Demonstração do Teorema 3.7: Seja \mathbb{Q}^* um ponto limite da sequência $\mathbb{Q}_{\mu^N}^N$. Pelo Lema 3.8 para \mathbb{Q}^* quase todo caminho $\zeta(t, u)$ existe $B = B(\zeta) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T ds \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} du \partial_u H(s, u) \zeta(s, u) + H(s, 0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \zeta(s, u) \right\} \\ - 2 \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}_+} du H^2(s, u) \zeta(s, u) \leq B, \end{aligned} \quad (3.29)$$

para cada $H \in C_0^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R})$. Observe que, já que $\zeta < 1$ podemos suprimir ζ no último integrando. A equação (3.29) implica que

$$\lambda(H) := \int_0^T ds \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} du \partial_u H(s, u) \zeta(s, u) + H(s, 0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \zeta(s, u) \right\}$$

é um funcional linear limitado sobre $C_0^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R})$ para a norma L^2 . Já que temos que $C_0^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R})$ é um subconjunto denso de $L^2([0, T] \times \mathbb{R})$, estendemos este funcional para um funcional linear limitado sobre $L^2([0, T] \times \mathbb{R})$. Pelo Teorema de Representação de Riez, existe uma função L^2 , denotada por $\vartheta(s, u)$, tal que

$$\lambda(H) = - \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}_+} du H(s, u) \vartheta(s, u)$$

para cada função suave $H : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto. Já que a integração por partes vale para $\vartheta(s, u)$, por definição ela é a derivada parcial fraca de $\zeta(s, u)$ na segunda variável. \square

Apêndice A

Acoplamento

Provamos nesta seção uma técnica usada nas seções anteriores. As demonstrações contam com um acoplamento entre o processo $(\xi_t)_{t \geq 0}$ definido na subseção 1.1 e um processo de exclusão $(\zeta_t)_{t \geq 0}$ semelhante a $(\xi_t)_{t \geq 0}$ mas sem a parte esquerda de $(\xi_t)_{t \geq 0}$, e partículas que chegam a fronteira neste processo desaparecem com taxa 1, fazendo com que o processo seja transladado para a esquerda. O processo ζ_t tem comportamento hidrodinâmico bem conhecido (ver Landim, Olla e Volchan em [9]).

Denote por $D_+^\xi(t)$ como sendo o número de ξ -partículas que o sistema perde em \mathbb{N} até o tempo t . Analogamente para $D_+^\zeta(t)$.

Lema A.1. *Existe um acoplamento $(\xi_t, \zeta_t)_{t \geq 0}$ tal que $D_+^\xi(t) \leq D_+^\zeta(t)$.*

Demonstração: Mostraremos que existe um acoplamento (ξ_t, ζ_t) , onde ξ_t é o sistema inicial que estamos interessados e ζ_t é o processo definido anteriormente. Começamos enumerando as partículas e denotando por $X_j^\zeta(t)$ (resp. $X_j^\xi(t)$) a posição da j -ésima ζ -partícula no tempo t (resp. j -ésima ξ -partícula no tempo t) se ela não deixou o sistema, e será 0 caso contrário.

Temos que o espaço de configurações do acoplamento é $\tilde{\Omega} = (\xi, \zeta) = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Ao invés de $\tilde{\Omega}$ trabalharemos com o espaço estendido $\tilde{\tilde{\Omega}} = \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}} = (\xi^-, (X_j^\xi)_{j=1}^{+\infty}, (X_j^\zeta)_{j=1}^{+\infty})$.

A justificativa de trabalharmos com o espaço $\tilde{\tilde{\Omega}}$ se dá pelo fato de termos a seguinte aplicação $(\xi, \zeta) \rightarrow (\xi^-, (X_j^\xi)_{j=1}^{+\infty}, (X_j^\zeta)_{j=1}^{+\infty}) \in \tilde{\tilde{\Omega}}$ pois

$$\xi(x) = \begin{cases} \xi^-(x), & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } x > 0 \text{ e } x = X_j^\xi \text{ para algum } j \geq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \text{ e } x = X_j^\zeta \text{ para algum } j \geq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere inicialmente $X_j^\eta(0) = X_j^\xi(0)$. As ξ, ζ -partículas com a mesma numeração saltam juntamente preservando a ordem até uma ζ -partícula morrer sozinha. Pois as ζ -partículas quando chegam em 0 podem deixar o sistema com taxa 1, já a sua correspondente ξ -partícula poderá não desaparecer se no mesmo instante $\xi_t^-(0) = 0$. O gerador do acoplamento é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}F(\xi^-, (X_j^\xi)_{j=1}^{+\infty}, (X_j^\zeta)_{j=1}^{+\infty}) &= \sum_{\substack{z, w < 1 \\ |z-w|=1}} \left[F((\xi^-)^{z, w}, (X_j^\xi), (X_j^\zeta)) - F((\xi^-), (X_j^\xi), (X_j^\zeta)) \right] + \\ &+ \sum_{k \geq \sigma^\zeta} [F(\xi^-, (X_j^\xi + \delta_{kj}(1 - \delta_{(x_k^\xi+1)x_{k+1}^\xi}), (X_j^\zeta + \delta_{kj}(1 - \delta_{(x_k^\eta+1)x_{k+1}^\zeta}))) - F(\xi^-, (X_j^\xi), (X_j^\zeta))] + \\ &+ \sum_{k \geq \sigma^\zeta} [F(\xi^-, (X_j^\xi - \delta_{kj}(1 - \delta_{(x_k^\xi-1)x_{k+1}^\xi}), (X_j^\zeta - \delta_{kj}(1 - \delta_{(x_k^\zeta-1)x_{k+1}^\zeta}))) - F(\xi^-, (X_j^\xi), (X_j^\zeta))] + \\ &+ \sum_{\sigma^\xi \leq k \leq \sigma^\zeta} [F(\xi^-, (X_j^\xi + \delta_{kj}(1 - \delta_{(x_k^\xi+1)x_{k+1}^\xi}), (X_j^\zeta)) - F(\xi^-, (X_j^\xi), (X_j^\zeta))] + \\ &+ \xi^-(0) \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{1\}}(x_l^\xi) \mathbb{I}_{\{1\}}(x_k^\zeta) \left[F((\tau(\xi^- - \varrho_0), (X_j^\xi - \mathbb{I}_{\{l, \dots, +\infty\}}(j)), (X_j^\zeta - \mathbb{I}_{\{k, \dots, +\infty\}}(j)))) + \right. \\ &- F((\xi^-), (X_j^\xi), (X_j^\zeta))] + \sum_{k=1}^{+\infty} [1 - \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{1\}}(x_l^\xi)] \mathbb{I}_{\{1\}}(x_k^\zeta) \left[F(\xi^-, (X_j^\xi), (X_j^\zeta - \mathbb{I}_{\{k, \dots, +\infty\}}(j))) - \right. \\ &- F((\xi^-), (X_j^\xi), (X_j^\zeta))] + (1 - \xi^-(0)) \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{1\}}(x_k^\zeta) \left[F((\xi^-), X_j^\xi, (X_j^\zeta - \mathbb{I}_{\{k, \dots, +\infty\}}(j)))) - \right. \\ &- F((\xi^-), (X_j^\xi), (X_j^\zeta))] \left. \right], \end{aligned}$$

onde $\sigma^\zeta = \max\{j \geq 1 : X_j^\zeta = 0\}$, $\sigma^\xi = \max\{j \geq 1 : X_j^\xi = 0\}$, ϱ_x representa a configuração com nenhuma partícula em x , $(\tau_x \xi^-)(z) = \xi^-(z+x)$ para todo z em Z_- e

$\delta_{k,j} = 1$ se $k = j$ e 0, caso contrário.

Devido a possibilidade de translações em ζ -partículas e a não translações de suas correspondentes ξ -partículas é fácil observar que $X_j^\zeta(t) \leq X_j^\xi(t)$, $\forall t$ e a partir disto concluir que $D_+^\xi \leq D_+^\zeta$, como queríamos mostrar. \square

Lema A.2. *Para cada $\delta > 0$, $T > 0$,*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \sup_{\theta \leq \epsilon} \mathbb{P}_{\mu_N}^N [D_+^N(\tau + \theta) - D_+^N(\tau) > \delta] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Demonstração: Aqui sem perda de generalidade podemos fixar $\delta < 1$. Como $D_+^N(\tau + \theta) - D_+^N(\tau)$ é crescente em θ temos que provar que

$$\limsup_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \mathbb{P}_{\mu_N}^N [(D_+^N(\tau + \gamma) - D_+^N(\tau)) \geq \delta] = 0. \quad (\text{A.2})$$

o que segue de

$$\limsup_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu_N}^N \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (D_+^N(t + \gamma) - D_+^N(t)) \geq \delta \right] = 0. \quad (\text{A.3})$$

Para provar (A.3) começamos com algumas observações:

- (i) Para todo t fixo seja j o único inteiro tal que $j\gamma \leq t < (j+1)\gamma$. Usando novamente o fato de D_+^N ser crescente, temos que

$$(D_+^N(t + \gamma) - D_+^N(t)) \leq (D_+^N((j+2)\gamma) - D_+^N(j\gamma))$$

Daí a probabilidade em (A.3) é limitada superiormente por

$$\mathbb{P}_{\mu_N}^N \left[\max_{m=1 \dots \lfloor \frac{T}{\gamma} \rfloor} (D_+^N((m+2)\gamma) - D_+^N(m\gamma)) \geq \delta \right].$$

que é limitada superiormente por

$$\sum_{m=1}^{\lfloor \frac{T}{\gamma} \rfloor} \mathbb{P}_{\mu_N}^N [(D_+^N((m+2)\gamma) - D_+^N(m\gamma)) \geq \delta]. \quad (\text{A.4})$$

(ii) Pela condição \tilde{E}_1 , temos que $\mu_n \leq \mu_\alpha$. Para o processo ξ_t começando em μ_n podemos verificar que a dominação estocástica se preserva no tempo, ou seja, a distribuição de ξ_t é estocasticamente dominada superiormente por μ_α para todo $t \geq 0$. Assim, novamente pela monotonicidade de D_+^N temos que (A.4) é menor ou igual a

$$\left\lfloor \frac{T}{\gamma} \right\rfloor \mathbb{P}_{\mu_\alpha}^N (D_+^N(2\gamma) \geq \delta). \quad (\text{A.5})$$

(iii) Lembre que $D_+^N(2) \leq D^\zeta(2)$ (considerando os processos acoplados como descrito no lema anterior). Em particular, pelo acoplamento, como $\delta < 1$ e pela desigualdade de Markov temos que

$$\mathbb{P}_{\mu_\alpha}^N [D_+^N(2\gamma) \geq \delta] \leq \mathbb{P}_{\mu_\alpha}^N [D^{N,\zeta}(2\gamma) \geq \delta] \leq \frac{\mathbb{E}_{\mu_\alpha}^N [(D^{N,\zeta}(2\gamma) \wedge 1)^3]}{\delta^3}.$$

(iv) Como obtido por Landim, Olla, Volchan em [9], temos que $(D^{N,\zeta}(t))_{0 \leq t \leq 1}$ converge em probabilidade (como elemento aleatório no espaço de Skorohod) para uma função determinística $(v_t)_{0 \leq t \leq 1}$. Também em [9] verifica-se que $v_t \leq \tilde{C}\sqrt{t}$. Daí temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_\alpha}^N [(D^{N,\zeta}(2\gamma) \wedge 1)^3] = (v_{2\gamma} \wedge 1)^3 \leq \tilde{C}\gamma^{\frac{3}{2}}.$$

Por (i), (ii), (iii) e (iv) temos que (A.3) é limitado superiormente por

$$\limsup_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{T}{\gamma} \right\rfloor \frac{1}{\delta^3} \mathbb{E}_{\mu_\alpha}^N [(D^{N,\zeta}(2\gamma) \wedge 1)^3] \leq \limsup_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\tilde{C}T}{\delta^3} \sqrt{\gamma} = 0.$$

Mostramos a seguir outro resultado que foi usado no Lema 3.4.

Lema A.3. *Considere o martingal $M_+^N(t) = D_+^N(t) - N \int_0^t \xi_s(0)\xi_s(1)ds$ com variação quadrática $\langle M_+^N \rangle_t = \int_0^t \xi_s(0)\xi_s(1)ds$. Mostre que para cada $\delta > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left(\left| \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \right| > \delta \right) = 0$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mu^N}^N \left(\left| \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \right| > \delta \right) &= \mathbb{P}_{\mu^N}^N \left(\left| \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \right|^2 > \delta^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left(\left| \frac{M_+^N(s+\epsilon) - M_+^N(s)}{\epsilon} \right|^2 \right) \\
&= \frac{1}{\delta^2 \epsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N}^N (\langle M_+^N(s+\epsilon) \rangle - \langle M_+^N(s) \rangle) \\
&= \frac{1}{\delta^2 \epsilon^2} \mathbb{E}_{\mu^N}^N \left(\int_s^{s+\epsilon} \xi_r(0) \xi_r(1) dr \right).
\end{aligned}$$

O lado direita desta desigualdade tende a zero no limite quando $N \rightarrow \infty$, por (3.7). \square

Seja $(\mu^N)_{N \geq 1}$ satisfazendo a condição $(\tilde{E}3)$ e $\alpha \in (0, 1)$ tal que $H(\mu^N | \nu_\alpha) < CN$. Observe que esta condição implica que para todo $N \geq 1$ e $t \geq 0$ (fixos)

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{x=1}^K \eta_t(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{x=-K+1}^0 \eta_t(x) = \alpha \quad \mu^N - q. c.$$

De fato, isto segue do seguinte resultado e do seu corolário mais abaixo:

Lema A.4. *Seja μ uma medida de probabilidade sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ tal que $H(\mu | \nu_\alpha^+) < \infty$, onde ν_α^+ é a medida produto de Bernoulli de parâmetro $\alpha \in (0, 1)$ sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$. Então*

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{x=1}^K \eta(x) = \alpha$$

para μ quase todo $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

Demonstração: Seja E o evento em que vale a igualdade do limite no enunciado. Pela desigualdade de entropia

$$\mu(E^c) \leq \frac{H(\mu | \nu_\alpha^+)}{M} + \frac{1}{M} \log E[e^{M \mathbf{1}_{E^c}}]$$

para todo $M > 0$. Pela Lei dos Grandes Números $\mathbf{1}_{E^c} = 0$ ν_α quase certamente. Logo o segundo termo na desigualdade acima é igual a zero. Como M é arbitrário e $H(\mu | \nu_\alpha^+) < \infty$ concluímos que $\mu(E^c) = 0$ como queríamos demonstrar. \square

Corolário A.5. *Seja μ uma medida de probabilidade sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que $H(\mu|\nu_\alpha) < \infty$ e $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo de Markov com gerador L , então para todo $N \geq 1$ e $t \geq 0$ temos que*

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{x=1}^K \eta_t(x) = \alpha$$

quase certamente.

Demonstração: O corolário se prova usando ideias de acoplamento discutidas no início deste capítulo. Considere um processo de exclusão sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^+}$ evoluindo como o nosso, porém sem as translações e a dissipatividade. Para este processo a medida ν_α^+ é invariante, logo a propriedade no enunciado é válida. Agora acople os processos de exclusão enumerando as partículas em ambos os processos e exigindo que partículas de mesmo índice em ambos os processos usem os mesmos relógios de salto. Como o número de partículas que o processo dissipativo perde é finito quase certamente, qualquer propriedade caudal válida para o processo não dissipativo é também válida para o processo dissipativo. Isto prova o corolário. \square

Sob a condição \tilde{E}_1 , vamos mostrar que para todo N fixo

$$M^N(t) = D^N(t) - \alpha \int_0^t N \xi_s^N(0) \xi_s^N(1) ds.$$

é um \mathcal{F}_t^N martingal (onde $\mathcal{F}_t^N = \sigma((\pi_s), s \leq t)$, $t \geq 0$, a filtração natural sobre $D([0, T], \mathcal{M})$). Então agora estaremos supondo que N está fixo. Considere as funções $H_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$H_m(x) = \left(1 - \frac{x}{m}\right) \mathbf{1}_{(0, m)}.$$

Consideramos

$$M^{N, H_m}(t) = \sum_{x=1}^{\infty} H_m(x/N) \xi_t(x) - \sum_{x=1}^{\infty} H_m(x/N) \xi_0(x) - \int_0^t L \sum_{x=1}^{\infty} H_m(x/N) \xi_s(x) ds. \quad (\text{A.6})$$

M^{N, H_m} é Martingal, ver apêndice em [6]. Vamos mostrar que M_T^{N, H_m} converge em L^2 para M_T^N quando $m \rightarrow \infty$. Por resultados clássicos obtemos que M^N é um L^2 -martingal, ver [5]. O resultado segue diretamente das seguintes afirmações (a serem verificadas):

(i) Para todo $t \geq 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t N^2 L \langle \pi_s^N, H_m \rangle ds = \alpha \int_0^t N \xi_s^N(0) \xi_s^N(1) ds \quad \text{em probabilidade.}$$

(ii) A sequência de martingais $(M^{N, H_m})_{m \geq 1}$ é Cauchy em L^2 .

Por (i) e (ii) temos que

$$\langle \pi_t^N, H_m \rangle - \langle \pi_0^N, H_m \rangle = M_t^{N, H_m} + \alpha \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, H_m \rangle ds$$

também converge em probabilidade. O limite (em probabilidade) acima é

$$M_t^N + \alpha \int_0^t N \xi_s^N(0) \xi_s^N(1) ds = \lim_{m \rightarrow \infty} (\langle \pi_t^N, H_m \rangle - \langle \pi_0^N, H_m \rangle) = \sum_{x \geq 1} (\eta_t(x) - \eta_0(x)) = D^N(t),$$

como queríamos provar. Para finalizar vamos provar (i) e (ii).

Prova de (i): Com base no cálculo feito no apêndice C, obtemos que

$$N^2 L \langle \pi_s^N, H_m \rangle = -\xi_s(0) \xi_s(1) \sum_{x \geq 0} (\nabla_N H_m)(x/N) \xi_s(x) + O(1/m) \quad (\text{A.7})$$

$$= N \xi_s(0) \xi_s(1) \left(\frac{1}{mN} \sum_{x=1}^{mN} \xi_s(x) \right) + O(1/m). \quad (\text{A.8})$$

Pelo Corolário A.5 temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mN} \sum_{x=0}^{mN-1} \xi_s(x) = \alpha,$$

quase certamente para todo $s \in [0, T]$. Portanto, pelo Teorema de Convergência Dominada o limite em (i) vale quase certamente e em particular em probabilidade (lembre que N está fixo). \square

Prova de (ii): Escolha $m < \bar{m}$. Por linearidade das integrais e do operador L , temos que

$$E[(M_t^{N, H_{\bar{m}}} - M_t^{N, H_m})^2] = E[(M_t^{N, H_{\bar{m}} - H_m})^2] = E[\langle M^{N, H_{\bar{m}} - H_m} \rangle_t].$$

Pela expressão em (3.6) para variação quadrática obtemos que $\langle M^{N, H_{\bar{m}} - H_m} \rangle_t$ é igual a

$$\int_0^t ds \left\{ \xi_s(0) \xi_s(1) \left(\sum_{x \geq 1} \xi_s(x) (\nabla_N H_{\bar{m}}(x/N) - \nabla_N H_m(x/N)) \right)^2 + O\left(\frac{1}{m \wedge \bar{m}}\right) \right\}$$

Como na prova da propriedade (i), pelo Corolário A.5 temos que

$$\sum_{x \geq 1} \xi_s(x) (\nabla_N H_{\bar{m}}(x/N) - \nabla_N H_m(x/N)) \rightarrow \alpha - \alpha = 0$$

quando m e \bar{m} divergem a infinito. Daí, duas aplicações do Teorema de Convergência Dominada permite concluir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty, \bar{m} \rightarrow \infty} E[(M_t^{N, H_{\bar{m}}} - M_t^{N, H_m})^2] = \lim_{m \rightarrow \infty, \bar{m} \rightarrow \infty} E[\langle M^{N, H_{\bar{m}} - H_m} \rangle_t] = 0.$$

□

Apêndice B

Cota superior para entropia relativa

Suponha que existe $C > 0$ tal que $\rho(u) = \beta$ se $u \in [-C, C]^c$, para $\beta \in (0, 1)$. Mostraremos que $E1$ implica em $\widetilde{E3}$ quando consideramos uma sequência de medidas iniciais para o Zero Range sendo uma sequência de medidas produto $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ em $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ com marginais geométricas de média $\rho(\cdot)$.

Pela transformação que leva o ZR no processo de Exclusão, temos que a medida $\nu_{\rho(\cdot)}^N$ sobre $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ será levada numa medida $\mu_{\rho(\cdot)}^N$ sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, que quando condicionada ao evento $\{\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L\}$, $L = 0, 1, \dots$, é produto fora da região $(-\int_{-C}^0 \rho(u)du + C, \int_0^C \rho(u)du + C)$, com marginais Bernoulli de parâmetro $\zeta(\cdot)$, tal que $\zeta(x) = 1 - \alpha$, para $x \in (-\int_{-C}^0 \rho(u)du + C, \int_0^C \rho(u)du + C)$, com $0 < \alpha < 1$. A relação entre α e β é $\beta = \frac{1}{1-\alpha} - 1$.

Afirmção1: Seja ν_α uma medida produto com marginais Bernoulli(α). Vamos mostrar existe uma constante γ tal que $H(\mu^N | \nu_\alpha) \leq \gamma N$.

Como a Entropia Relativa é convexa (Proposição A1.8.1 em [7]), temos que

$$\begin{aligned}
 H(\mu^N | \nu_\alpha^N) &= H\left(\sum_{L=0}^{+\infty} \mu^{N,L} \mu^N\left(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L\right) \mid \nu_\alpha\right) \\
 &\leq \sum_{L=0}^{+\infty} H(\mu^{N,L} | \nu_\alpha) \mu^N\left(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L\right) \\
 &= \sum_{L=0}^{\delta N} H(\mu^{N,L} | \nu_\alpha) \mu^N\left(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L\right) + \sum_{L=\delta N+1}^{+\infty} H(\mu^{N,L} | \nu_\alpha) \mu^N\left(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L\right),
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde $\mu^{N,L}(\cdot) = \mu^N(\cdot \mid \sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L)$ e $\delta = \int_{-C}^C \rho_0(u) du$.

Antes de continuar a demonstração, vamos dar a transformada de Laplace da Geométrica que será usada para o próximo resultado :

Lema B.1. *Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro h . Logo a transformada de Laplace de X é dada por:*

$$\mathbb{E} [e^{\lambda X}] = \frac{h}{1 - e^{\lambda}(1 - h)}.$$

Demonstração:

$$\mathbb{E} [e^{\lambda X}] = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{\lambda k}(1 - h))^k = h \frac{1}{1 - e^{\lambda k}(1 - h)} \cdot \cdot$$

Para o nosso caso, usaremos h tal que $\frac{1-h}{h} = \rho(x/N) \Rightarrow h = \frac{1}{1+\rho(x/N)}$ e $\lambda = 1/N$.

Precisaremos também de uma estimativa da Transformada de Laplace da medida $\nu_{\rho(\cdot)^N}$, e esta é dada pelo seguinte lema.

Lema B.2. *Seja $\{\eta(x)\}_{x \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com distribuição geométrica de parâmetro $\rho(\cdot)$. Então*

$$\mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}^N} \left[e^{-\frac{1}{N} \sum_{x=-CN}^{CN} \eta(x)} \right] \leq e^{\theta \frac{1}{N} \sum_{x=-CN}^{CN} \rho(x/N) + o(1/N)},$$

onde θ é uma constante.

Demonstração: Pelo lema anterior e pelo fato das variáveis aleatórias serem independentes, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}^N} \left[e^{-\frac{1}{N} \sum_{x=-CN}^{CN} \eta(x)} \right] &= \prod_{x=-CN}^{CN} \mathbb{E}_{\nu_{\rho(\cdot)}^N} \left[e^{-\frac{1}{N} \eta(x)} \right] = \prod_{x=-CN}^{CN} \frac{\frac{1}{1+\rho(x/N)}}{1 - e^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{1+\rho(x/N)}\right)} \\ &= \prod_{x=-CN}^{CN} \frac{1}{1 - (e^{1/N} - 1)\rho(x/N)} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Considerando $(e^{1/N} - 1)\rho(x/N)$ suficientemente pequeno, temos $-\log(1 - (e^{1/N} - 1)\rho(x/N)) \leq \Theta[(e^{1/N} - 1)\rho(x/N)]$. Pela expansão de Taylor de e^x em torno de zero, temos $e^{1/N} - 1 = 1/N + o(1/N^2)$. Logo, o termo B.2 é estimado por

$$\prod_{x=-CN}^{CN} \frac{1}{1 - (e^{1/N} - 1)\rho(x/N)} \leq e^{\Theta \frac{1}{N} \sum_{x=-CN}^{CN} \rho(x/N) + o(1/N)}$$

Afirmação2: Considerando $M = L + 2CN$

$$H(\mu^{N,L}|\nu_\alpha^N) \leq \gamma M,$$

onde $\gamma = \max \left\{ \log \left(\frac{1}{1-\alpha} \right), \log \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right\}$.

Demonstração da Afirmação2: Observamos que a medida $\mu^{N,L}$ pode ser

escrita como um produto de medidas, $\mu^{N,L} = \mu_1^{N,L} \mu_2^{N,L}$, onde $\mu_1^{N,L}$ é definida sobre configurações em $\{0, 1\}^{[-(\delta+2C)N/2, (\delta+2C)N/2]}$ e $\mu_2^{N,L}$ é definida sobre configurações em $\{0, 1\}^{[-(\delta+2C)N/2, (\delta+2C)N/2]^C}$. Conseqüentemente, a derivada de Radon Nykodim com respeito a medida produto Bernoulli de parâmetro α , ν_α^N será

$$\frac{d\mu^{N,L}}{d\nu_\alpha^N} = \frac{d\mu_1^{N,L}}{d\nu_\alpha^N} \frac{d\mu_2^{N,L}}{d\nu_\alpha^N}.$$

Como $\mu_2^{N,L}$ coincide com ν_α^N , $\frac{d\mu_2^{N,L}}{d\nu_\alpha^N} = 1$. Logo, para o cálculo da Entropia, basta considerarmos $\mu_1^{N,L}$, ou seja,

$$H(\mu^{N,L}|\nu_\alpha^N) = H(\mu_1^{N,L}|\nu_\alpha^N),$$

Para ξ um configuração qualquer em $\{0, 1\}^{[-(\delta+2C)N/2, (\delta+2C)N/2]}$, seja δ_ξ a medida de Dirac concentrada na configuração ξ . Note que qualquer medida de probabilidade em $\{0, 1\}^{T^N}$, onde $T^N = [-(\delta + 2C)N/2, (\delta + 2C)N/2]$ pode ser escrita como

$$\mu_1^{N,L} = \sum_{\xi \in \{0,1\}^{T^N}} \mu_1^{N,L}(\xi) \delta_\xi,$$

ou seja, como combinação convexa de medidas de Dirac. Seguindo a fórmula da entropia

relativa em [7] (Teorema A1.8.3), temos

$$\begin{aligned}
& H(\delta_\xi | \nu_\alpha^N) = \\
& E_{\nu_\alpha^N} \left[\frac{d\delta_\xi}{d\nu_\alpha^N} \log \frac{d\delta_\xi}{d\nu_\alpha^N} \right] = \frac{1}{\nu_\alpha^N(\xi)} \log \left(\frac{1}{\nu_\alpha^N(\xi)} \right) \nu_\alpha^N(\xi) \\
& = \log \left(\frac{1}{\prod_{x \in T^N} \alpha^{\xi(x)} (1-\alpha)^{1-\xi(x)}} \right) \\
& = \sum_{x \in T^N} \left[\xi(x) \log \left(\frac{1}{\alpha} \right) + (1-\xi(x)) \log \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \right].
\end{aligned}$$

Como $\xi(x) \in \{0, 1\}$, cada uma das $|T^N| = L' = (\delta + 2C)N$ parcelas no somatório acima é igual a $\log(1/\alpha)$ ou $\log(1/(1-\alpha))$. Portanto, denotando

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \max \left\{ \log \left(\frac{1}{1-\alpha} \right), \log \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right\},$$

temos que $H(\delta_\xi | \nu_\alpha^N) \leq \gamma L'$. E como a entropia relativa é convexa (Proposição A1.8.1 em Kipnis & Landim),

$$H(\mu_1^{N,L} | \nu_\alpha^N) = H \left(\sum_{\xi \in \{0,1\}^{T^N}} \mu_1^{N,L}(\xi) \delta_\xi \middle| \nu_\alpha^N \right) \leq \sum_{\xi \in \{0,1\}^{T^N}} \mu_1^{N,L}(\xi) H(\delta_\xi | \nu_\alpha^N) \leq \gamma L'.$$

Lema B.3. $\sum_{\delta \in \Theta_N}^{+\infty} H(\mu^{N,L}(\cdot) | \nu_\alpha) \mu^N(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L)$

Demonstração: De 9.39 temos

$$\begin{aligned}
H(\mu^N | \nu_\alpha^N) & \leq \sum_{L=0}^{+\infty} H(\mu^{N,L} | \nu_\alpha) \mu^N \left(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L \right) \\
& = \sum_{L=0}^{\delta N-1} H(\mu^{N,L} | \nu_\alpha) \mu^N \left(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L \right) + \sum_{L=\delta N}^{+\infty} H(\mu^{N,L} | \nu_\alpha) \mu^N \left(\sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L \right),
\end{aligned} \tag{B.3}$$

onde $\mu^{N,L}(\cdot) = \mu^N(\cdot | \sum_{-CN}^{CN} \eta(x) = L)$ e $\delta = \int_{-C}^C \rho_0(u) du$. Já que a soma na primeira parcela na desigualdade anterior é finita, estimaremos a segunda parcela. Para isso, observe que pela afirmação 2

$$\begin{aligned}
\sum_{L=\delta N}^{+\infty} H(\mu^{N,L}|\nu_\alpha)\mu^N\left(\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)=L\right) &\leq \sum_{L=\delta N}^{+\infty} \gamma(L+2CN)\mu^N\left(\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)=L\right) \\
&\leq \sum_{L=\delta N}^{+\infty} \gamma(L+2CN)\mu^N\left(\frac{1}{N}\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)=\frac{L}{N}\right) \\
&\leq \sum_{L\geq\tilde{\delta}N} \mu^N\left(\frac{1}{N}\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)\geq\frac{L}{N}\right),
\end{aligned}$$

para continuar, precisaremos do seguinte lema:

Lema B.4. *Existem $\Theta > 0$ e $\tilde{\Theta} > 0$, tais que*

$$\mu^N\left(\frac{1}{N}\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)\geq a\right) \leq \tilde{\Theta}e^{\Theta\delta-a},$$

para $a > 0$.

Demonstraçãõ: Pela desigualdade de Tchebycheff, temos que

$$\mu^N\left(\frac{1}{N}\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)\geq a\right) \leq \frac{1}{e^a}E\left[e^{\frac{1}{N}\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)}\right] \leq e^a e^{\Theta\frac{1}{N}\sum_{x=-CN}^{CN}\rho(x/N)+o(1/N)}$$

A última desigualdade acima se dá pelo Lema 10, concluindo assim a demonstraçãõ, com $\delta = \frac{1}{N}\sum_{x=-CN}^{CN}\rho(x/N)$ e $\tilde{\Theta} = e^{o(1/N)}$. \square Voltando para a demonstraçãõ do Lema 11,

temos pelo resultado anterior, que existem $\Theta > 0$ e $\tilde{\Theta} > 0$, tais que

$$\sum_{L\geq\tilde{\delta}N} \mu^N\left(\frac{1}{N}\sum_{-CN}^{CN}\eta(x)\geq\frac{L}{N}\right) \leq \sum_{L\geq\tilde{\delta}N} \tilde{\Theta}e^{\Theta\delta-\frac{L}{N}}$$

Fazendo uma mudançã de variáveis, pondo $\tilde{L} = L - \tilde{\delta}N$, temos que

$$\sum_{L\geq\tilde{\delta}N} \tilde{\Theta}e^{\Theta\delta-\frac{L}{N}} = \tilde{\Theta}e^{\Theta\delta+\tilde{\delta}} \sum_{\tilde{L}\geq 0} e^{-\frac{\tilde{L}}{N}} = \tilde{\Theta}e^{\Theta\delta+\tilde{\delta}} \frac{1}{1-e^{-1/N}} \approx \tilde{\Theta}N,$$

como queríamos. \square

Apêndice C

Cálculo da Variação Quadrática

Seja $p(\cdot)$ uma probabilidade de transição simétrica com alcance finito M sobre \mathbb{Z} , tal que $p(z) = p(-z) \forall z \in \mathbb{Z}$ e $p(z) = 0$, se $|z| > M$. Definimos um processo de exclusão sobre \mathbb{Z} associado a $p(\cdot)$, que é um processo com espaço de configurações $\Lambda = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, cuja evolução pode ser descrita na seguinte maneira: inicialmente cada sítio de \mathbb{Z} pode estar ou não ocupado por uma partícula, cada partícula do sistema aguarda, independentemente de qualquer outra partícula, um tempo exponencial de parâmetro 1 e naquele tempo ele escolhe outro sítio de acordo com $p(\cdot)$ e salta para o sítio escolhido se ele não está ocupado. Além disso há condições de fronteira: partículas do lado direito da fronteira não podem saltar para a esquerda da mesma, e vice-versa.

$$M = 1$$

Considere as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\pi^N &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \xi(x) \delta_{x/N} \\ \langle \pi^N, G \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{x < 0} G\left(\frac{x}{N}\right) \xi(x) + \frac{1}{N} \sum_{x \geq 0} G\left(\frac{x}{N}\right) \xi(x) \\ \langle \pi^N, G \rangle^2 &= \langle \pi^N, G \rangle \langle \pi^N, G \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}} G\left(\frac{x}{N}\right) G\left(\frac{y}{N}\right) \xi(x) \xi(y),\end{aligned}$$

$$L \langle \pi^N, G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x < 0} G\left(\frac{x}{N}\right) L \xi(x) + \frac{1}{N} \sum_{x \geq 0} G\left(\frac{x}{N}\right) L \xi(x), \quad (\text{C.1})$$

$$L\langle \pi^N, G \rangle^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}} G\left(\frac{x}{N}\right) G\left(\frac{y}{N}\right) L\xi(x) \xi(y). \quad (\text{C.2})$$

Faremos primeiramente o cálculo de $L\langle \pi^N, G \rangle$, para isto observe que

$$L\xi(x) = L_1\xi(x) + L_2\xi(x) + L_T\xi(x),$$

onde

$$\begin{aligned} L_1\xi(x) &= \sum_{y \leq 0} L_{y, y+1} \xi(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y \leq 0} [\xi(y)(1 - \xi(y+1))(\xi^{y, y+1}(x) - \xi(x)) + \xi(y+1)(1 - \xi(y))(\xi^{y+1, y}(x) - \xi(x))], \\ L_2\xi(x) &= \sum_{y \geq 1} L_{y, y+1} \xi(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y \geq 1} [\xi(y)(1 - \xi(y+1))(\xi^{y, y+1}(x) - \xi(x)) + \xi(y+1)(1 - \xi(y))(\xi^{y+1, y}(x) - \xi(x))], \end{aligned}$$

e

$$L_T\xi(x) = \begin{cases} \xi(0)\xi(1)(\xi(x+1) - \xi(x)), & \text{se } x \geq 1, \\ \xi(0)\xi(1)(\xi(x-1) - \xi(x)), & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Além disso

$$\xi^{y, y+1}(x) - \xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi(x) = 0, \xi(x+1) = 1 \text{ e } y = x, \\ -1, & \text{se } \xi(x) = 1, \xi(x+1) = 0 \text{ e } y = x, \\ 1, & \text{se } \xi(x) = 0, \xi(x-1) = 1 \text{ e } y = x-1, \\ -1, & \text{se } \xi(x) = 1, \xi(x-1) = 0 \text{ e } y = x-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} .$$

Logo,

$$L_1\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{-\xi(x)(1 - \xi(x+1)) + \xi(x+1)(1 - \xi(x)) + \xi(x-1)(1 - \xi(x)) \\ -\xi(x)(1 - \xi(x-1))\}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}\{\xi(-1)(1 - \xi(0)) - \xi(0)(1 - \xi(-1))\}, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$L_2\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{-\xi(x)(1 - \xi(x+1)) + \xi(x+1)(1 - \xi(x)) + \xi(x-1)(1 - \xi(x)) \\ -\xi(x)(1 - \xi(x-1))\}, & \text{se } x \geq 2, \\ \frac{1}{2}\{-\xi(1)(1 - \xi(2)) + \xi(2)(1 - \xi(1))\}, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Simplificando obtemos

$$L_1\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{\xi(x-1) - 2\xi(x) + \xi(x+1)\}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}\{\xi(-1) - \xi(0)\}, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$L_2\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{\xi(x-1) - 2\xi(x) + \xi(x+1)\}, & \text{se } x \geq 2, \\ \frac{1}{2}\{\xi(2) - \xi(1)\}, & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Substituindo (C.11), (C.12) e (C.10) em (C.8) obtemos

$$\begin{aligned}
L\langle \pi^N, G \rangle &= \frac{1}{2N} \sum_{y \leq -1} [G(\frac{y+1}{N}) - 2G(\frac{y}{N}) + G(\frac{y-1}{N})] \xi(y) \\
&+ \frac{1}{2N} \sum_{y \geq 0} [G(\frac{y+1}{N}) - 2G(\frac{y}{N}) + G(\frac{y-1}{N})] \xi(y) - \frac{1}{2N} G(0) \xi(1) \\
&- \frac{1}{N} G(1/N) \xi(1) - \frac{1}{2N} G(1/N) \xi(0) - \frac{1}{N} G(-1/N) \xi(0) \xi(1) \\
&+ \frac{1}{N} G(0) \xi(0) \xi(1) - \frac{1}{2N} G(0) \xi(0) - \frac{1}{2N} G(1/N) \xi(1) \\
&+ \frac{1}{N} \xi(0) \xi(1) \left[\sum_{y \geq 0} (G(\frac{y-1}{N}) - G(\frac{y}{N})) \xi(y) \right] \\
&+ \frac{1}{N} \xi(0) \xi(1) \left[\sum_{y \leq -1} (G(\frac{y+1}{N}) - G(\frac{y}{N})) \xi(y) \right] \\
&= \frac{1}{2N^2} \langle \pi^N, \Delta_N G \rangle + \xi(0) \xi(1) N^{-2} \left[\sum_{y \leq -1} \nabla G(y/N) \xi(y) - \sum_{y \geq 0} \nabla G((y-1)/N) \xi(y) \right] \\
&+ N^{-2} \xi(0) \xi(1) \nabla_N G(0) + \frac{1}{2N^2} [\xi(1) - \xi(0)] \nabla_N G(0).
\end{aligned}$$

Pondo $H_1(u) = \nabla G(u) I_{(-\infty, -1]}(u)$ e $H_2(u) = \nabla G(u) I_{[0, +\infty)}(u)$, obtemos

$$\begin{aligned}
L\langle \pi^N, G \rangle &= \frac{1}{2N^2} \langle \pi^N, \Delta_N G \rangle + \xi(0) \xi(1) N^{-1} [\langle \pi^N, H_1 \rangle - \langle \pi^N, H_2 \rangle] \\
&+ N^{-2} \xi(0) \xi(1) \nabla_N G(0) + \frac{1}{2N^2} [\xi(1) - \xi(0)] \nabla_N G(0).
\end{aligned}$$

Para provar a rigidez precisamos estimar a esperança do quadrado de $M_t^{G,N}$

$$\langle M_t^{G,N} \rangle = \int_0^t N^2 \{ L\langle \pi_s^N, G \rangle^2 - 2\langle \pi_s^N, G \rangle L\langle \pi_s^N, G \rangle \} ds$$

O termo do integrando para a parte simétrica do gerador pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x, y \leq -1}} G(x/N) G(y/N) \{ L_1[\xi(x) \xi(y)] - 2\xi(x) L_1 \xi(y) \} \\
&+ \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x, y \geq 1}} G(x/N) G(y/N) \{ L_2[\xi(x) \xi(y)] - 2\xi(x) L_2 \xi(y) \}. \tag{C.6}
\end{aligned}$$

Já que, para todos $x, y \geq 1$ ou $x, y \leq -1$ tais que $|x - y| > 1$, temos $L_s \xi(x) \xi(y) = \xi(y) L_s \xi(x) + \xi(x) L_s \xi(y)$, onde $s = 1, 2$, os termos com $|x - y| > 1$ não precisam ser considerados na expressão acima.

Além disso, $L_s \xi(x) \xi(x + 1) = \xi(x + 1) W_{x-1, x} - \xi(x) W_{x+1, x+2}$, para todo $x \geq 2$ ou $x \leq -2$ e $L_2 \xi(1) \xi(2) = -\xi(1) W_{2,3}$ e $L_1 \xi(-1) \xi(0) = -\xi(0) W_{-2,-1}$, onde $W_{x, x+1} = \frac{1}{2} [\xi(x) - \xi(x + 1)]$.

Portanto, a expressão (C.15) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}} [L_s \xi^2(x) - 2\xi(x) L_s \xi(x)] - 2G(1/N)G(2/N)\xi(1)W_{2,3} + 2G(-1/N)G(0)\xi(0)W_{-2,-1} \\ + 2 \sum_{x \geq 2} G(x/N)G(x+1/N) [\xi(x+1)W_{x-1, x} - \xi(x)W_{x+1, x+2}] \\ + 2 \sum_{x \leq -1} G(x/N)G(x+1/N) [\xi(x+1)W_{x-1, x} - \xi(x)W_{x+1, x+2}] \\ - 2 \sum_{x \geq 1} G(x/N)G(x+1/N) [\xi(x)L_2 \xi(x+1) + \xi(x+1)L_2 \xi(x)] \\ - 2 \sum_{x \leq -1} G(x/N)G(x+1/N) [\xi(x)L_1 \xi(x+1) + \xi(x+1)L_1 \xi(x)]. \end{aligned}$$

De modo a simplificar a expressão acima, observamos que

$$L_s \xi^2(x) - 2\xi(x) L_s \xi(x) = \xi(x)[1 - \xi(x-1)] + \xi(x+1)[1 - \xi(x)] + \xi(x)[1 - \xi(x+1)] + \xi(x+1)[1 - \xi(x)]$$

para todo $x \geq 2$ e $x \leq -1$. Além disso

$$L_2 \xi^2(1) - 2\xi(1) L_2 \xi(1) = \frac{1}{2} \{ \xi(1)[1 - \xi(2)] + \xi(2)[1 - \xi(1)] \},$$

$$L_1 \xi^2(0) - 2\xi(0) L_1 \xi(0) = \frac{1}{2} \{ \xi(0)[1 - \xi(-1)] + \xi(-1)[1 - \xi(0)] \},$$

$$\xi(x+1)W_{x-1, x} - \xi(x)W_{x+1, x+2} - \xi(x)L_s \xi(x+1) - \xi(x+1)L_s \xi(x) = -\xi(x)[1 - \xi(x+1)] - \xi(x+1)[1 - \xi(x)]$$

para $x \geq 2$ ou $x \leq -2$. E

$$\xi(1)W_{2,3} + \xi(1)L_2 \xi(2) + \xi(2)L_2 \xi(1) = \xi(1)[1 - \xi(2)] + \xi(2)[1 - \xi(1)],$$

$$\xi(0)W_{-2,-1} - [\xi(-1)L_1 \xi(0) + \xi(0)L_1 \xi(-1)] = -\frac{1}{2} \{ \xi(0)[1 - \xi(-1)] + \xi(-1)[1 - \xi(0)] \}.$$

Logo, a expressão (C.15) pode ser escrita como

$$\sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x,y \leq 0}} [G(x/N) - G(y/N)]^2 \xi(x) [1 - \xi(y)] + \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x,y \geq 1}} [G(x/N) - G(y/N)]^2 \xi(x) [1 - \xi(y)] \quad (\text{C.7})$$

Para a parte antissimétrica do gerador tem-se

$$\begin{aligned} N^2 \{L_T \langle \pi^N, G \rangle^2 - 2 \langle \pi^N, G \rangle L_T \langle \pi^N, G \rangle\} &= \sum_{x,y \leq 0} G(x/N) G(y/N) [L_T \xi(x) \xi(y) - 2 \xi(x) L_T \xi(y)] \\ + \sum_{x,y \geq 1} G(x/N) G(y/N) [L_T \xi(x) \xi(y) - 2 \xi(x) L_T \xi(y)] &+ \sum_{\substack{y \geq 1 \\ x \leq 0}} G(x/N) G(y/N) [L_T \xi(x) \xi(y) - 2 \xi(x) L_T \xi(y)] \\ &+ \sum_{\substack{x \geq 1 \\ y \leq 0}} G(x/N) G(y/N) [L_T \xi(x) \xi(y) - 2 \xi(x) L_T \xi(y)] \\ &= \xi(0) \xi(1) \sum_{x,y \leq 0} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})] [G(\frac{y+1}{N}) - G(\frac{y}{N})] \xi(x) \xi(y) \\ &\quad + \xi(0) \xi(1) \sum_{x,y \geq 1} [G(\frac{x}{N}) - G(\frac{x-1}{N})] [G(\frac{y}{N}) - G(\frac{y-1}{N})] \xi(x) \xi(y) \\ &\quad + 2 \xi(0) \xi(1) \sum_{\substack{y \geq 2 \\ x \leq -1}} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})] [G(\frac{y-1}{N}) - G(\frac{y}{N})] \xi(x) \xi(y) \\ &\quad - 4 G(1/N) \xi(0) \xi(1) \sum_{x < 0} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})] \xi(x) + 2 \xi(0) \xi(1) G(1/N) G(0). \end{aligned}$$

$M = 2$

Considere as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\pi^N &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \xi(x) \delta_{x/N} \\ \langle \pi^N, G \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{x < 0} G\left(\frac{x}{N}\right) \xi(x) + \frac{1}{N} \sum_{x \geq 0} G\left(\frac{x}{N}\right) \xi(x) \\ \langle \pi^N, G \rangle^2 &= \langle \pi^N, G \rangle \langle \pi^N, G \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}} G\left(\frac{x}{N}\right) G\left(\frac{y}{N}\right) \xi(x) \xi(y),\end{aligned}$$

$$L\langle \pi^N, G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x < 0} G\left(\frac{x}{N}\right) L\xi(x) + \frac{1}{N} \sum_{x \geq 0} G\left(\frac{x}{N}\right) L\xi(x), \quad (\text{C.8})$$

$$L\langle \pi^N, G \rangle^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}} G\left(\frac{x}{N}\right) G\left(\frac{y}{N}\right) L\xi(x) \xi(y). \quad (\text{C.9})$$

Faremos primeiramente o cálculo de $L\langle \pi^N, G \rangle$, para isto observe que

$$L\xi(x) = L_1\xi(x) + L_2\xi(x) + L_3\xi(x) + L_4\xi(x) + L_T\xi(x),$$

onde

$$\begin{aligned}
L_1\xi(x) &= \sum_{y \leq 0} L_{y,y+1}\xi(x) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{y \leq 0} [\xi(y)(1 - \xi(y+1))(\xi^{y,y+1}(x) - \xi(x)) + \xi(y+1)(1 - \xi(y))(\xi^{y+1,y}(x) - \xi(x))], \\
L_2\xi(x) &= \sum_{y \geq 1} L_{y,y+1}\xi(x) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{y \geq 1} [\xi(y)(1 - \xi(y+1))(\xi^{y,y+1}(x) - \xi(x)) + \xi(y+1)(1 - \xi(y))(\xi^{y+1,y}(x) - \xi(x))], \\
L_3\xi(x) &= \sum_{y \leq 0} L_{y,y+2}\xi(x) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{y \leq 0} [\xi(y)(1 - \xi(y+2))(\xi^{y,y+2}(x) - \xi(x)) + \xi(y+2)(1 - \xi(y))(\xi^{y+2,y}(x) - \xi(x))], \\
L_4\xi(x) &= \sum_{y \geq 1} L_{y,y+2}\xi(x) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{y \geq 1} [\xi(y)(1 - \xi(y+2))(\xi^{y,y+2}(x) - \xi(x)) + \xi(y+2)(1 - \xi(y))(\xi^{y+2,y}(x) - \xi(x))],
\end{aligned}$$

e

$$L_T\xi(x) = \begin{cases} \xi(0)\xi(1)(\xi(x+1) - \xi(x)), & \text{se } x \geq 1, \\ \xi(0)\xi(1)(\xi(x-1) - \xi(x)), & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Além disso

$$\xi^{y,y+k}(x) - \xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi(x) = 0, \xi(x+k) = 1 \text{ e } y = x, \\ -1, & \text{se } \xi(x) = 1, \xi(x+k) = 0 \text{ e } y = x, \\ 1, & \text{se } \xi(x) = 0, \xi(x-k) = 1 \text{ e } y = x-k, \\ -1, & \text{se } \xi(x) = 1, \xi(x-k) = 0 \text{ e } y = x-k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} .$$

para $k = 1, 2$. Logo,

$$L_1\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\{\xi(x-1) - 2\xi(x) + \xi(x+1)\}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{1}{4}\{\xi(-1) - \xi(0)\}, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

$$L_2\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\{\xi(x-1) - 2\xi(x) + \xi(x+1)\}, & \text{se } x \geq 2, \\ \frac{1}{4}\{\xi(2) - \xi(1)\}, & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

$$L_3\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\{\xi(x-2) - 2\xi(x) + \xi(x+2)\}, & \text{se } x \leq -2, \\ \frac{1}{4}\{\xi(x-2) - \xi(x)\}, & \text{se } x = -1, 0, \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

$$L_4\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\{\xi(x-2) - 2\xi(x) + \xi(x+2)\}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{1}{4}\{\xi(x+2) - \xi(x)\}, & \text{se } x = 1, 2 \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Substituindo (C.11), (C.12),(C.13),(C.14), e (C.10) em (C.8) obtemos

$$\begin{aligned} L\langle\pi^N, G\rangle &= \frac{1}{4N} \sum_{y \leq -1} [G(\frac{y+1}{N}) - 2G(\frac{y}{N}) + G(\frac{y-1}{N})]\xi(y) \\ &+ \frac{1}{4N} \sum_{y \geq 0} [G(\frac{y+1}{N}) - 2G(\frac{y}{N}) + G(\frac{y-1}{N})]\xi(y) - \frac{1}{4N}G(0)\xi(1) \\ &- \frac{1}{2N}G(1/N)\xi(1) - \frac{1}{4N}G(1/N)\xi(0) - \frac{1}{2N}G(-1/N)\xi(0)\xi(1) \\ &+ \frac{1}{2N}G(0)\xi(0)\xi(1) - \frac{1}{4N}G(0)\xi(0) - \frac{1}{4N}G(1/N)\xi(1) \\ &+ \frac{1}{N}\xi(0)\xi(1) \left[\sum_{y \geq 0} (G(\frac{y-1}{N}) - G(\frac{y}{N}))\xi(y) \right] \\ &+ \frac{1}{4N} \sum_{y \leq -1} [G(\frac{y+2}{N}) - 2G(\frac{y}{N}) + G(\frac{y-2}{N})]\xi(y) \\ &+ \frac{1}{4N} \sum_{y \geq 0} [G(\frac{y+2}{N}) - 2G(\frac{y}{N}) + G(\frac{y-2}{N})]\xi(y) \\ &+ 2\frac{1}{4N} \{ \xi(-1)[G(-1/N) - G(-1/N)] + \xi(0)[G(0) - G(2/N)] + \xi(1)[G(1/N) \\ &- G(-1/N)] + \xi(2)[G(2/N) - G(0)] \} + \frac{1}{N}\xi(0)\xi(1) \left[\sum_{y \leq -1} (G(\frac{y+1}{N}) - G(\frac{y}{N}))\xi(y) \right] \\ &= \frac{1}{4N^2} \langle\pi^N, \Delta_N G\rangle + \frac{1}{4N^2} 2\langle\pi^N, \Delta_N G\rangle \\ &+ \xi(0)\xi(1)N^{-2} \left[\sum_{y \leq -1} \nabla G(y/N)\xi(y) - \sum_{y \geq 0} \nabla G((y-1)/N)\xi(y) \right] + N^{-2}\xi(0)\xi(1)\nabla_N G(0) \\ &+ \frac{1}{4N^2} [\xi(1) - \xi(0)]\nabla_N G(0) + \frac{1}{4N^2} [\xi(1) + \xi(2) - \xi(0) - \xi(-1)]\nabla_N G(0). \end{aligned}$$

Pondo $H_1(u) = \nabla G(u)I_{(-\infty, -1]}(u)$ e $H_2(u) = \nabla G(u)I_{[0, +\infty)}(u)$, obtemos

$$\begin{aligned} L\langle \pi^N, G \rangle &= \frac{3}{4N^2} \langle \pi^N, \Delta_N G \rangle + \xi(0)\xi(1)N^{-1}[\langle \pi^N, H_1 \rangle - \langle \pi^N, H_2 \rangle] \\ &+ N^{-2}\xi(0)\xi(1)\nabla_N G(0) + \frac{1}{2N^2}[\xi(1) - \xi(0)]\nabla_N G(0) + \frac{1}{4N^2}[\xi(2) - \xi(-1)]\nabla_N G(0). \end{aligned}$$

Para provar a rigidez precisamos estimar a esperança do quadrado de $M_t^{G,N}$

$$\langle M_t^{G,N} \rangle = \int_0^t N^2 \{L\langle \pi_s^N, G \rangle^2 - 2\langle \pi_s^N, G \rangle L\langle \pi_s^N, G \rangle\} ds$$

O termo do integrando para a parte simétrica do gerador pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x,y \leq -1}} G(x/N)G(y/N) \{L_1[\xi(x)\xi(y)] - 2\xi(x)L_1\xi(y)\} \\ &+ \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x,y \geq 1}} G(x/N)G(y/N) \{L_2[\xi(x)\xi(y)] - 2\xi(x)L_2\xi(y)\} \\ &\sum_{\substack{|x-y|=2 \\ x,y \leq -1}} G(x/N)G(y/N) \{L_3[\xi(x)\xi(y)] - 2\xi(x)L_3\xi(y)\} \\ &+ \sum_{\substack{|x-y|=2 \\ x,y \geq 1}} G(x/N)G(y/N) \{L_4[\xi(x)\xi(y)] - 2\xi(x)L_4\xi(y)\}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Já que, para todos $x, y \geq 1$ ou $x, y \leq -1$ tais que $|x - y| > 1$, temos $L_s\xi(x)\xi(y) = \xi(y)L_s\xi(x) + \xi(x)L_s\xi(y)$, onde $s = 1, 2$, os termos com $|x - y| > 1$ não precisam ser considerados nas duas primeiras parcelas da expressão acima. Analogamente, para todos $x, y \geq 1$ ou $x, y \leq -1$ tais que $|x - y| \geq 1$, temos $L_s\xi(x)\xi(y) = \xi(y)L_s\xi(x) + \xi(x)L_s\xi(y)$, onde $s = 3, 4$, os termos com $|x - y| \geq 1$ não precisam ser considerados nas duas últimas parcelas da expressão acima.

Além disso, para $s = 1, 2$, $L_s\xi(x)\xi(x+1) = \xi(x+1)W_{x-1,x} - \xi(x)W_{x+1,x+2}$, para todo $x \geq 2$ ou $x \leq -2$ e $L_2\xi(1)\xi(2) = -\xi(1)W_{2,3}$ e $L_1\xi(-1)\xi(0) = -\xi(0)W_{-2,-1}$, onde $W_{x,x+1} = \frac{1}{4}[\xi(x) - \xi(x+1)]$.

E para $s = 3, 4$, $L_s\xi(x)\xi(x+2) = \xi(x+2)W_{x-2,x} - \xi(x)W_{x+2,x+4}$, para todo $x \geq 4$ ou $x \leq -3$ e $L_4\xi(1)\xi(3) = -\xi(1)W_{3,5}$, $L_4\xi(2)\xi(4) = -\xi(2)W_{4,6}$, $L_3\xi(-2)\xi(0) = -\xi(0)W_{-2,-4}$ e $L_3\xi(-3)\xi(-1) = \xi(-1)W_{-5,-3}$ onde $W_{x,x+2} = \frac{1}{4}[\xi(x) - \xi(x+2)]$.

Portanto, a expressão (C.15) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
& \sum_{x,y \in \mathbb{Z}} [L_s \xi^2(x) - 2\xi(x)L_s \xi(x)] - 2G(1/N)G(2/N)\xi(1)W_{2,3} + 2G(-1/N)G(0)\xi(0)W_{-2,-1} \\
& - 2G(1/N)G(3/N)\xi(1)W_{3,5} - 2G(2/N)G(4/N)\xi(2)W_{4,6} + 2G(-2/N)G(0/N)\xi(0)W_{-4,-2} \\
& + 2G(-3/N)G(-1/N)\xi(-1)W_{-5,-3} + 2 \sum_{x \geq 2} G(x/N)G(x+1/N)[\xi(x+1)W_{x-1,x} - \xi(x)W_{x+1,x+2}] \\
& + 2 \sum_{x \leq -1} G(x/N)G(x+1/N)[\xi(x+1)W_{x-1,x} - \xi(x)W_{x+1,x+2}] \\
& - 2 \sum_{x \geq 1} G(x/N)G(x+1/N)[\xi(x)L_2 \xi(x+1) + \xi(x+1)L_2 \xi(x)] \\
& - 2 \sum_{x \leq -1} G(x/N)G(x+1/N)[\xi(x)L_1 \xi(x+1) + \xi(x+1)L_1 \xi(x)].
\end{aligned}$$

Analogamente ao caso do processo anterior, podemos simplificar a expressão acima, observamos que

$$L_s \xi^2(x) - 2\xi(x)L_s \xi(x) = \xi(x)[1 - \xi(x-1)] + \xi(x-1)[1 - \xi(x)] + \xi(x)[1 - \xi(x+1)] + \xi(x+1)[1 - \xi(x)]$$

para todo $x \geq 2$ e $x \leq -1$ e $s = 1, 2$,

$$L_s \xi^2(x) - 2\xi(x)L_s \xi(x) = \xi(x)[1 - \xi(x-2)] + \xi(x-2)[1 - \xi(x)] + \xi(x)[1 - \xi(x+2)] + \xi(x+2)[1 - \xi(x)]$$

para todo $x \geq 3$ e $x \leq -2$ e $s = 3, 4$, além disso

$$L_2 \xi^2(1) - 2\xi(1)L_2 \xi(1) = \frac{1}{4} \{ \xi(1)[1 - \xi(2)] + \xi(2)[1 - \xi(1)] \},$$

$$L_1 \xi^2(0) - 2\xi(0)L_1 \xi(0) = \frac{1}{4} \{ \xi(0)[1 - \xi(-1)] + \xi(-1)[1 - \xi(0)] \},$$

$$L_3 \xi^2(0) - 2\xi(0)L_3 \xi(0) = \frac{1}{4} \{ \xi(0)[1 - \xi(-2)] + \xi(-2)[1 - \xi(0)] \},$$

$$L_3 \xi^2(-1) - 2\xi(-1)L_3 \xi(-1) = \frac{1}{4} \{ \xi(-3)[1 - \xi(-1)] + \xi(-1)[1 - \xi(-3)] \},$$

$$L_4 \xi^2(1) - 2\xi(1)L_4 \xi(1) = \frac{1}{4} \{ \xi(3)[1 - \xi(1)] + \xi(1)[1 - \xi(3)] \},$$

$$L_4 \xi^2(2) - 2\xi(2)L_4 \xi(2) = \frac{1}{4} \{ \xi(4)[1 - \xi(2)] + \xi(2)[1 - \xi(4)] \},$$

$$\xi(x+1)W_{x-1,x} - \xi(x)W_{x+1,x+2} - \xi(x)L_s \xi(x+1) - \xi(x+1)L_s \xi(x) = -\xi(x)[1 - \xi(x+1)] - \xi(x+1)[1 - \xi(x)]$$

para $x \geq 2$ ou $x \leq -2$ e $s = 1, 2$,

$$\xi(x+2)W_{x-2,x} - \xi(x)W_{x+2,x+4} - \xi(x)L_s\xi(x+2) - \xi(x+2)L_s\xi(x) = -\xi(x)[1-\xi(x+2)] - \xi(x+2)[1-\xi(x)]$$

para $x \geq 3$ ou $x \leq -3$ e $s = 3, 4$. E

$$\xi(1)W_{2,3} + \xi(1)L_2\xi(2) + \xi(2)L_2\xi(1) = \xi(1)[1-\xi(2)] + \xi(2)[1-\xi(1)],$$

$$\xi(0)W_{-2,-1} - [\xi(-1)L_1\xi(0) + \xi(0)L_1\xi(-1)] = -\frac{1}{2}\{\xi(0)[1-\xi(-1)] + \xi(-1)[1-\xi(0)]\}.$$

Logo, a expressão (C.15) pode ser escrita como

$$\sum_{\substack{|x-y|=2 \\ |x-y|=1 \\ x,y \leq 0}} [G(x/N) - G(y/N)]^2 \xi(x)[1-\xi(y)] + \sum_{\substack{|x-y|=2 \\ |x-y|=1 \\ x,y \geq 1}} [G(x/N) - G(y/N)]^2 \xi(x)[1-\xi(y)] \quad (\text{C.16})$$

Para a parte antissimétrica do gerador tem-se

$$\begin{aligned} N^2 \{L_T \langle \pi^N, G \rangle^2 - 2 \langle \pi^N, G \rangle L_T \langle \pi^N, G \rangle\} &= \sum_{x,y \leq 0} G(x/N)G(y/N)[L_T \xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T \xi(y)] \\ + \sum_{x,y \geq 1} G(x/N)G(y/N)[L_T \xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T \xi(y)] &+ \sum_{\substack{y \geq 1 \\ x \leq 0}} G(x/N)G(y/N)[L_T \xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T \xi(y)] \\ &+ \sum_{\substack{x \geq 1 \\ y \leq 0}} G(x/N)G(y/N)[L_T \xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T \xi(y)] \\ &= \xi(0)\xi(1) \sum_{x,y \leq 0} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})][G(\frac{y+1}{N}) - G(\frac{y}{N})]\xi(x)\xi(y) \\ &\quad + \xi(0)\xi(1) \sum_{x,y \geq 1} [G(\frac{x}{N}) - G(\frac{x-1}{N})][G(\frac{y}{N}) - G(\frac{y-1}{N})]\xi(x)\xi(y) \\ &\quad + 2\xi(0)\xi(1) \sum_{\substack{y \geq 2 \\ x \leq -1}} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})][G(\frac{y-1}{N}) - G(\frac{y}{N})]\xi(x)\xi(y) \\ &\quad - 4G(1/N)\xi(0)\xi(1) \sum_{x < 0} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})]\xi(x) + 2\xi(0)\xi(1)G(1/N)G(0). \end{aligned}$$

caso geral

O gerador do novo processo é $L\xi(x) = \sum_{i=-M}^M L_i\xi(x) + L_T$, onde para cada $i = 1, \dots, M$, temos

$$\begin{aligned} L_i\xi(x) &= \sum_{x>0} L_{y,y+i} & (C.17) \\ &= p(i) \sum_{x>0} [\xi(y)(1 - \xi(y+i))(\xi^{y,y+i}(x) - \xi(x)) + \xi(y+i)(1 - \xi(y))(\xi^{y+i,y}(x) - \xi(x))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{-i}\xi(x) &= \sum_{x\leq 0} L_{y,y+i} & (C.18) \\ &= p(i) \sum_{x\leq 0} [\xi(y)(1 - \xi(y+i))(\xi^{y,y+i}(x) - \xi(x)) + \xi(y+i)(1 - \xi(y))(\xi^{y+i,y}(x) - \xi(x))], \end{aligned}$$

$$L_T\xi(x) = \begin{cases} \xi(0)\xi(1)(\xi(x+1) - \xi(x)), & \text{se } x \geq 1, \\ \xi(0)\xi(1)(\xi(x-1) - \xi(x)), & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (C.19)$$

Além disso,

$$\xi^{y,y+i}(x) - \xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi(x) = 0, \xi(x+i) = 1 \text{ e } y = x, \\ -1, & \text{se } \xi(x) = 1, \xi(x+i) = 0 \text{ e } y = x, \\ 1, & \text{se } \xi(x) = 0, \xi(x-i) = 1 \text{ e } y = x-i, \\ -1, & \text{se } \xi(x) = 1, \xi(x-i) = 0 \text{ e } y = x-i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} .$$

Fazendo alguns cálculos elementares, observamos que

$$L_i\xi(x) = \begin{cases} p(i)\{\xi(x-i) - 2\xi(x) + \xi(x+i)\}, & \text{se } x \geq i+1, \\ p(i)\{\xi(x+i) - \xi(x)\}, & \text{se } x = 1, \dots, i, \end{cases} \quad (C.20)$$

$$L_{-i}\xi(x) = \begin{cases} p(i)\{\xi(x-i) - 2\xi(x) + \xi(x+i)\}, & \text{se } x \leq -i, \\ p(i)\{\xi(x+i) - \xi(x)\}, & \text{se } x = -i+1, -i+2, \dots, -1, 0. \end{cases} \quad (C.21)$$

Considerando as expressões acima e fazendo mais alguns cálculos e mudanças de

variáveis, obtém-se

$$\begin{aligned}
L\langle \pi^N, G \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{x < 0} G(x/N) \sum_{i=-k}^{-1} L_i \xi(x) + \frac{1}{N} \sum_{x \geq 0} G(x/N) \sum_{i=1}^k L_i \xi(x) & (C.22) \\
&= \frac{p(i)}{N} \left\{ \sum_{y \geq 1} G((y+i)/N) \xi(y) - 2 \sum_{y \geq i+1} G(y/N) \xi(y) + \sum_{y \geq 2i+1} G((y-i)/N) \xi(y) \right\} \\
&+ \frac{p(i)}{N} \left\{ \sum_{y=1+i}^{2i} G((y-i)/N) \xi(y) - \sum_{y=1}^i G(y/N) \xi(y) \right\} \\
&+ \frac{p(i)}{N} \left\{ \sum_{y \leq -2i} G((y+i)/N) \xi(y) - 2 \sum_{y \leq -i} G(y/N) \xi(y) + \sum_{y \leq 0} G((y-i)/N) \xi(y) \right\} \\
&+ \frac{p(i)}{N} \left\{ \sum_{y=1-2i}^{-i} G((y+i)/N) \xi(y) - \sum_{y=-i+1}^0 G(y/N) \xi(y) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^M \frac{i^2 p(i)}{N^2} \langle \pi^N, \Delta_N G \rangle + \xi(0) \xi(1) N^{-1} [\langle \pi^N, H_1 \rangle - \langle \pi^N, H_2 \rangle] & (C.23) \\
&+ N^{-2} \xi(0) \xi(1) \nabla_N G(0) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \frac{i p(i)}{N} \left\{ \sum_{y=1}^i \nabla_N G(y/N) \xi(y) - \sum_{y=-i+1}^{-1} \nabla_N G(y/N) \xi(y) \right\}.
\end{aligned}$$

Para provar a rigidez precisamos estimar a esperança do quadrado de $M_t^{G,N}$

$$\langle M_t^{G,N} \rangle = \int_0^t N^2 \{ L \langle \pi_s^N, G \rangle^2 - 2 \langle \pi_s^N, G \rangle L \langle \pi_s^N, G \rangle \} ds$$

Analogamente ao caso do processo simples, o termo do integrando para a parte simétrica do gerador pode ser escrito como

$$\sum_{\substack{|x-y|=i \\ i=1,2,\dots,M \\ x,y \leq 0}} [G(x/N) - G(y/N)]^2 \xi(x) [1 - \xi(y)] + \sum_{\substack{|x-y|=i \\ i=1,2,\dots,M \\ x,y \geq 1}} [G(x/N) - G(y/N)]^2 \xi(x) [1 - \xi(y)] & (C.24)$$

Para a parte antissimétrica do gerador tem-se

$$\begin{aligned}
N^2\{L_T\langle\pi^N, G\rangle^2 - 2\langle\pi^N, G\rangle L_T\langle\pi^N, G\rangle\} &= \sum_{x,y\leq 0} G(x/N)G(y/N)[L_T\xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T\xi(y)] \\
+ \sum_{x,y\geq 1} G(x/N)G(y/N)[L_T\xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T\xi(y)] &+ \sum_{\substack{y\geq 1 \\ x\leq 0}} G(x/N)G(y/N)[L_T\xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T\xi(y)] \\
&+ \sum_{\substack{x\geq 1 \\ y\leq 0}} G(x/N)G(y/N)[L_T\xi(x)\xi(y) - 2\xi(x)L_T\xi(y)] \\
&= \xi(0)\xi(1) \sum_{x,y\leq 0} [G(\frac{x+1}{N}) - G(x/N)][G(\frac{y+1}{N}) - G(y/N)]\xi(x)\xi(y) \\
&+ \xi(0)\xi(1) \sum_{x,y\geq 1} [G(\frac{x}{N}) - G(\frac{x-1}{N})][G(\frac{y}{N}) - G(\frac{y-1}{N})]\xi(x)\xi(y) \\
&+ 2\xi(0)\xi(1) \sum_{\substack{y\geq 2 \\ x\leq -1}} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})][G(\frac{y-1}{N}) - G(\frac{y}{N})]\xi(x)\xi(y) \\
&- 4G(1/N)\xi(0)\xi(1) \sum_{x<0} [G(\frac{x+1}{N}) - G(\frac{x}{N})]\xi(x) + 2\xi(0)\xi(1)G(1/N)G(0).
\end{aligned}$$

O comportamento hidrodinâmico

Fixe uma sequência de medidas de probabilidade $\{\mu^N : N \geq 1\}$ sobre $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfazendo $(E_1) - (E_3)$ com perfil inicial limitado $\zeta_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada função contínua $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto e cada $\delta > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N} \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} G(x/N) \xi_{tN^2}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \zeta(t, u) du \right| > \delta \right) = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mu^N} (|D^N(t) - D(t)| > \delta) = 0,$$

onde $(\zeta, D) : ([0, T] \times \mathbb{R}) \times [0, T] \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+$ é a solução fraca da equação diferencial parcial

$$\begin{cases} \partial_t \zeta = \sigma_1^2 \Delta \zeta - \dot{D}_t \partial_u \zeta, & u > 0, \\ \partial_t \zeta = \sigma_2^2 \Delta \zeta + \dot{D}_t \partial_u \zeta, & u < 0, \\ \dot{D}_t = \partial_u \zeta(t, 0+) = -\partial_u \zeta(t, 0-), \\ \zeta(t, 0+) \zeta(t, 0-) = 0, \\ \zeta(0, u) = \zeta_0(u), \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

onde $\zeta_0 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é uma função mensurável, chamada perfil inicial de densidade,

$$\sigma_1^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} i^2 p(i), \sigma_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}_-} i^2 p(i).$$

Demonstração do limite hidrodinâmico

A generalização dos lemas de substituição se dará pela seguinte observação:

$$\begin{aligned} \xi(1) - \xi(x) &= \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+1)) = 2 \sum_{i=1}^M p(i) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+1)) \\ &= 2 \left[p(1) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+1)) + p(2) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+1)) + \cdots + p(M) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+1)) \right] \\ &= 2 \left[p(1) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+1)) + p(2) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+2)) + \cdots + p(M) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+M)) \right] \\ &+ 2 \left[p(2) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y+2) - \xi(y+1)) + p(3) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y+3) - \xi(y+1)) + \cdots + p(M) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y+M) - \xi(y+1)) \right] \\ &= 2 \left[p(1) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+1)) + p(2) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+2)) + \cdots + p(M) \sum_{y=1}^{x-1} (\xi(y) - \xi(y+M)) \right] \\ &+ 2 [p(2)(\xi(x+1) - \xi(2)) + p(3)[-(\xi(2) + \xi(3)) + \xi(x+1) + \xi(x+2)] \\ &+ \cdots + p(M) \left(- \sum_{i=2}^M \xi(i) + \sum_{i=1}^{M-1} \xi(x+i) \right)] \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] ANDJEL, E.D. Convergence to a non extremal equilibrium measure in the exclusion process, *Prob. Th. Rel. Fields*, 73, 127-134 (1986).
- [2] EVANS, L. Partial Differential Equations, *American Mathematical Society* (1998).
- [3] FUNAKI T., SASADA M. Hydrodynamic Limit for an Evolutional Model of Two-Dimensional Young Diagrams, *Commun. Math. Phys.* 299, 335-363 (2010).
- [4] GUO M., PAPANICOLAOU G., VARADHAN S. Nonlinear diffusion limit for a System with nearest neighbor interactions, *Comm. Math. Phys.* 118, 31-59 (1988).
- [5] KARATZAS, SHREEVE: Brownian Motion and Stochastic Processes.
- [6] KIPNIS, C. CLT for series of queues and tagged particle, *Ann. Prob.* 14(2), 397-408 (1986).
- [7] KIPNIS C., LANDIM C. Scaling Limits of Interacting Particles Systems, *Springer-Verlag* (1997).
- [8] LADYZENSKAJA, O. A., SOLONNIKOV, V. A., URAL'CEVA, N. N. Linear and Quasilinear equations of parabolic type, *Translation of Mathematical Monographs* 23, (1968).
- [9] LANDIM C., OLLA S., VOLCHAN S. Driven Tracer Particle and Einstein Relation in One Dimensional Symmetric Simple Exclusion Process, *Commun. Math Phys.* 192, 287-307 (1998).
- [10] LANDIM C., VALLE G. A microscopic model for Stefan's melting and freezing problem, *Ann Prob.* 34(2), 779-803 (2006).
- [11] LIGGETT, T.M. Interacting Particle Systems, *Springer-Verlag, New York* (1985).

- [12] VALLE, G. Evolution of the interfaces in a two dimensional Potts model, *Elec. Journal of Prob.* 12, 354-386, (2007).
- [13] VALLE, G. Hidrodynamics for a non-conservative interacting particle system , *Markov Proc. Rel. Fields* 17 225-252, (2011).