

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Departamento de Métodos Estatísticos

*Teoremas de Não-Arbitragem em
Mercados Regidos pelo Movimento
Browniano Fracionário*

Rodrigo dos Santos Targino

Orientador: Prof. Glauco Valle

Rio de Janeiro

Abril de 2010

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Departamento de Métodos Estatísticos

*Teoremas de Não-Arbitragem em Mercados Regidos pelo
Movimento Browniano Fracionário*

Rodrigo dos Santos Targino

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Prof. Glauco Valle

Rio de Janeiro

Abril de 2010

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Departamento de Métodos Estatísticos

*Teoremas de Não-Arbitragem em Mercados Regidos pelo
Movimento Browniano Fracionário*

Rodrigo dos Santos Targino

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada por:

Prof. Glauco Valle da Silva Coelho, presidente
IM - UFRJ

Prof. Leandro Pinto Rodrigues Pimentel
IM - UFRJ

Prof. Nei Carlos dos Santos Rocha
IM - UFRJ

Prof. Jorge Passamani Zubelli
IMPA

Rio de Janeiro, Abril de 2010.

T185 Targino, Rodrigo dos Santos.
Teoremas de não-arbitragem em mercados regidos pelo movimento browniano fracionário. / Rodrigo dos Santos Targino. -- Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2010.
xi, 103f.: il. ; 30 cm.
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Estatística, 2010.
Orientador: Glauco Valle.
Referências: f. 99-103.
1. Processos estocásticos. 2. Processos de movimentos brownianos. 3. Arbitragem. I. Valle, Glauco. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

“We have not succeeded in answering all our problems. The answers we have found only serve to raise a whole set of new questions. In some ways we feel we are as confused as ever, but we believe we are confused on a higher level and about more important things.”

Posted outside the mathematics
reading room, Tromsø
University

Esse trabalho é dedicado a todos os meus amigos, pois sem eles nada disto teria sido possível.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao meu orientador, professor Glauco Valle, por ter aceitado me orientar neste tema e ter acreditado que eu era capaz de desenvolvê-lo. Aprendi muito com o professor Glauco Valle, tanto durante a dissertação como durante os cursos que fiz com ele. Foi um enorme prazer tê-lo por perto durante todo esse tempo.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Estatística, principalmente àqueles que, desde minha graduação, sempre incentivaram-me a seguir meus estudos de Pós-graduação. Particularmente aos professores Dani Gamerman, com o qual tive o prazer de ser apresentado à Probabilidade e à Estatística e, subsequentemente, à pesquisa nesta última (durante minha Iniciação Científica); Helio Migon e Alexandra Schmidt por todas as nossas conversas e principalmente pela paciência em me ouvir e por todos os conselhos!

Agradeço ainda à Pós-graduação em Estatística por ter me dado a oportunidade de conhecer pessoas que conviveram comigo diariamente nos últimos anos. Fico muito grato de ter feito parte da turma do João Batista, da Kelly Cristina, da Larissa Alves, do Leonardo Nassif e do Thiago Guerrero. Esse último meu grande companheiro de “cafézinho-- apesar d’eu não tomar café! E foi em um desses “cafés” que surgiu a idéia esboçada na seção 4.7 e que será apresentada de forma mais precisa em sua dissertação de mestrado. Essas são pessoas as quais só tenho a agradecer por todos os momentos que passamos naquele laboratório. Mas como todos sabem, sempre fiz parte de quase todas as turmas, obrigado a estas turmas por me aturarem também!

Mas meu interesse pela Estatística talvez não tivesse aflorado se não tivesse feito a graduação em Matemática Aplicada, a qual me abriu os olhos para a Universidade como um todo e, principalmente, para o Instituto de Matemática. Muito obrigado, Felipe Acker! Mesmo indiretamente, você me ajudou muito!

À todos do grupo de finanças do IMPA, principalmente o professor Jorge Zubelli e o (agora) doutor Leonardo Muller, com os quais aprendi muito sobre *Financial Mathematics*.

Ao professor Milan Merkle, quem me apresentou o mundo da *Mathematical Finance* e veio a se tornar um excelente colaborador em diversos trabalhos científicos.

Obviamente agradeço às pessoas mais importantes durante esse trabalho e na minha vida como um todo: meus amigos, a família que escolhi. Um deles, em particular, por não saber se enquadraria como colega de trabalho ou colaborador científico, faço questão de

colocá-lo no grupo mais importante da minha vida: o dos amigos. Muitíssimo obrigado, Yuri Saporito! Obrigado por tudo que aprendemos juntos e tudo que você me ensinou! Agradeço também ao meu (ex-)companheiro de apartamento, Enio Hayashi, por toda sua paciência e nossas conversas (matemáticas ou não).

À todos da minha “turma” da Matemática Aplicada (em ordem cronológica): Fábio Ramos, Rogério Lourenço, Vinicius Gripp, João Paulo Timbó, Rafael Quaresma, Pedro Maia, Rafael March (meu amigo mais ciumento), Léo Fraga, Roberto Machado Velho, Arthur Mitrano, Diogo Duarte, Pedro Yunes e Ulisses Gorito. Essas pessoas foram extremamente importantes durante o desenvolvimento deste texto. Embora nenhuma delas tenha corrigido as demonstrações presentes, sempre tivemos conversas matemáticas frutíferas – algumas delas regadas à umas boas cervejas!

Ainda na Matemática Aplicada, agradeço ao “lado B”, que ajudou a manter minha vida social ainda mais ativa. Durante todo o mestrado tive o apoio e a compreensão dos meus grandes amigos Ciro Paolucci, Vitor Alney, Rafael Carvalho, Eduardo Jotha, Douglas Jorge e todos os outros que agregamos na nossa “Equipe”. Obrigado por todas as sextas-feiras em que precisei espairecer!

Obrigado a todos os meus amigos de sábados também! Foi muito mais fácil trabalhar no domingo depois de ter jogado o Peladão da Civil (onde fui gentilmente agregado através do André Assef), ido ao sambinha da Toca do Baiacú (Rua do Ouvidor 41 – sim! É uma propaganda!) e depois curtido a noite, normalmente, com meus amigos tijuicanos e grajauenses – os quais não vou citar os nomes por que sei que eles jamais irão ler este texto! De fato, acho que isso tornou meu domingo mais improdutivo, mas prefiro pensar que era necessário para a minha mente!

E por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer à minha família: meu pai, Marco Antonio, minhas mães, Miriam e Rose e meus irmãos, Raphael e Felipe Gaspar. Agradeço por ter tido a oportunidade de escolher parte da minha família!

Rodrigo dos Santos Targino
Abril de 2010

Resumo

Teoremas de Não-Arbitragem em Mercados Regidos pelo Movimento Browniano Fracionário

Rodrigo dos Santos Targino

Resumo: Partindo do interesse de modelar produtos financeiros através de processos não-Markovianos uma possibilidade passa a ser o chamado movimento Browniano fracionário. No entanto, por esse processo não ser um semimartingal a modelagem matemática clássica de finanças em tempo contínuo garante que existe alguma possibilidade de ganho de capital sem risco. Este trabalho apresenta dois teoremas acerca da inexistência de possibilidades de arbitragem em modelos regidos pelo movimento Browniano fracionário. As hipóteses adicionais destes teoremas (em relação à modelagem clássica) não os tornam mais irrealistas, pelo contrário, pois são, em um deles, a exigência de um tempo mínimo de espera entre duas transações e, no outro, a inclusão de custos de transação proporcionais ao valor do ativo negociado. Serão apresentados também alguns dos estimadores do parâmetro de memória longa existentes na literatura, que podem ser utilizados para corroborar a hipótese de existência desse fenômeno em preços de ativos financeiros.

Palavras-chave. Processos Estocásticos, Movimento Browniano Fracionário, Finanças Quantitativas, Arbitragem .

Abstract

No-Arbitrage Theorems in Markets Driven by the Fractional Brownian Motion

Rodrigo dos Santos Targino

Abstract: Starting from the interest of modeling financial products through the usage of non-Markovian processes a possibility is the utilization of the so called fractional Brownian motion. However, since this process is not a semimartingale, the classic mathematical modeling of continuous time finance ensures that there exists some possibility of capital gain without risk. This work presents two theorems about the inexistence of arbitrage possibilities in models driven by the fractional Brownian motion. The additional hypothesis of the theorems (in relation to the classical modeling) do not turn them more unreal, on the contrary, because they are, in one of the cases, the requirement of a minimum waiting time between two consecutive transactions and, in the other case, the inclusion of transaction costs proportional to the asset's value. It also presents some estimators for the long memory parameter that can be used to corroborate the hypothesis on the existence of this phenomenon in financial assets pricing.

Keywords. Stochastic Processes, Fractional Brownian Motion, Financial Mathematics, Arbitrage.

Sumário

1	Introdução	1
2	O Movimento Browniano Fracionário e Conceitos de Finanças	3
2.1	Comentários iniciais	3
2.1.1	Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade...	4
2.1.2	Filtrações e histórias	6
2.1.3	Tempos aleatórios	8
2.2	Auto-similaridade e dependência de longo prazo	11
2.2.1	Auto-similaridade	12
2.2.2	O movimento Browniano fracionário	18
2.2.3	Dependência de longo prazo e os incrementos do mBf	24
2.3	Conceitos de Finanças	27
2.3.1	Estratégias de negociação	27
2.3.2	Arbitragem	32
2.3.3	Arbitragem em modelos fracionários	35
3	Exclusão de Arbitragem em Modelos Fracionários	48
3.1	Abordagem de Cheridito	50
3.1.1	Exclusão da Arbitragem	50
3.2	Abordagem de Guasoni	60
3.2.1	Processos contínuos com suporte completo	66
3.2.2	Exclusão da Arbitragem	76
3.2.3	Comentários	80

4	Estimadores de Dependência de Longo Prazo	82
4.1	Variância Agregada	82
4.2	Valores Absolutos da Série Agregada	83
4.3	Estatística R/S	84
4.4	Método do Periodograma	87
4.5	Estimador de Whittle	89
4.6	Resultados Numéricos	91
4.7	Comentários	95
5	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	97

Capítulo 1

Introdução

E eis que vêm sete anos, e haverá grande fartura em toda a terra do Egito;

E depois deles levantar-se-ão sete anos de fome, e toda aquela fartura será esquecida na terra do Egito, e a fome consumirá a terra

Gênesis 41:29-30

A passagem Bíblica acima talvez seja a mais antiga acerca do conceito de Dependência de Longo Prazo, que veio a ser estudado em detalhes anos depois pelo hidrologista Harold Hurst [Hurst \(1951\)](#). Neste estudo H.E. Hurst analisou a série do nível mínimo do rio Nilo, entre os anos de 622 e 1281 e constatou que esta série temporal exibia um padrão diferente do esperado em séries “sem memória”.

Uma década depois, em [Mandelbrot \(1963\)](#) Benoit Mandelbrot trouxe o recém definido conceito de memória longa para os mercados financeiros, após analisar a evolução dos preços do algodão. Mais uma década depois, em [Greene e Fielitz \(1977\)](#) os autores analisaram o comportamento de 200 títulos listados na Bolsa de Nova Iorque (NYSE) e encontraram, nos retornos, indícios de dependência de longo prazo. Apesar dos indícios de dependência de longo prazo em produtos financeiros a utilização do movimento Browniano fracionário em Finanças passou a ser questionada, pois poderia levar a possibilidade de obter lucro sem risco e sem investimento de capital [Rogers \(1997\)](#).

Vale ressaltar que o movimento Browniano fracionário foi introduzido por Andrei Nikolaevich Kolmogorov, com o nome de “Espirais de Wiener” (*Wiener Spirals*), em [Kolmogorov \(1940\)](#) e o nome *fractional Brownian motion* (movimento Browniano fracionário) cunhado no trabalho seminal de Benoit Mandelbrot e John van Ness [Mandelbrot e Van Ness \(1968\)](#).

O objetivo principal deste trabalho será apresentar dois teoremas de não-arbitragem para mercados regidos pelo movimento Browniano fracionário. A primeira abordagem, baseada nos trabalhos de Patrick Cheridito (ver [Cheridito \(2003\)](#) e [Cheridito \(2001\)](#)) exige que seja necessário um tempo mínimo (pré-determinado e tão pequeno quanto se queira) entre duas transações. A outra abordagem, devida a Paolo Guasoni (ver [Guasoni \(2006\)](#) e [Guasoni \(2002\)](#)) lança mão de custos de transação proporcionais ao valor do ativo e estes podem ser definidos tão baixos quanto o mercado real estiver admitindo.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo [2](#) introduz conceitos básicos de Processos Estocásticos e apresenta um estudo do movimento Browniano fracionário, desde sua definição até propriedades de seus incrementos. Neste capítulo são apresentadas, ainda, as definições formais de conceitos importantíssimos em Finanças, como estratégias de negociação e arbitragem. No Capítulo [3](#) são apresentados os dois teoremas principais do trabalho, que garante a inexistência de possibilidades de arbitragem em modelos fracionários. Como o parâmetro de dependência de longo prazo desempenha um papel importantíssimo em toda teoria apresentada neste texto, no Capítulo [4](#) são apresentados e testados alguns dos estimadores utilizados na literatura. Este capítulo conclui apresentando uma proposta de inferência (Bayesiana) para os modelos apresentados durante o texto. Ao final do trabalho, no Capítulo [5](#) apresentamos as conclusões e algumas direções para pesquisas futuras.

Capítulo 2

O Movimento Browniano Fracionário e Conceitos de Finanças

Neste capítulo, após dissertar sobre alguns conceitos básicos que serão necessários no restante do texto, será definido o movimento Browniano fracionário: um processo Gaussiano de média zero, auto-similar e com incrementos estacionários. Apresentaremos ainda algumas propriedades do movimento Browniano fracionário e de seus incrementos. Encerramos o capítulo apresentando alguns conceitos importantes de Finanças, dando especial atenção ao conceito de Arbitragem.

2.1 Comentários iniciais

Dados dois processos estocásticos $X = (X_t)_{t \in T}$ e $Y = (Y_t)_{t \in T}$ com o mesmo conjunto de índices (arbitrário) temos as seguintes definições.

Definição 2.1. (Versão) Diremos que X é uma versão de Y (e vice e versa) se

$$\forall t \in T, \mathbb{P}[\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)] = 1.$$

Definição 2.2. (Processos indistinguíveis) Diremos que X e Y são indis-

tinguíveis se

$$\mathbb{P}[\omega : \forall t \in T, X_t(\omega) = Y_t(\omega)] = 1.$$

Observação 2.3. Se $T = \mathbb{R}^d$ então qualquer versão contínua a direita do mesmo processo é indistinguível.

Definição 2.4. (Processos singulares) Os processos X e Y são ditos singulares se $\exists A, B \in \mathcal{F}$ com $A \cap B = \emptyset$ tais que

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega : \forall t \in T, X_t(\omega) \in A] = 1 \text{ e}$$

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega : \forall t \in T, Y_t(\omega) \in B] = 1$$

Definição 2.5. (Trajetória) Uma trajetória de um processo estocástico X é o resultado de uma de suas possíveis realizações. Formalmente, para um dado $\omega \in \Omega$ uma trajetória é o conjunto $(Z_t(\omega))_{t \in T}$.

Dado um processo estocástico qualquer, digamos, $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ denotaremos por \mathcal{F}^X , à filtração gerada por X , ou seja, $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in [0, T]}$, onde $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \in [0, T], s \leq t)$.

Diremos que uma filtração genérica $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ satisfaz as *hipóteses usuais* se ela é contínua a direita, \mathcal{F}_T é completa e \mathcal{F}_0 contém todos os de medida \mathbb{P} nula de \mathcal{F}_T .

2.1.1 Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade...

Todos os trabalhos que tratam, de alguma forma, de modelos estocásticos usualmente começam com a sentença mágica “seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade...”. Mas o que é, de fato, espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$? Nesta seção será apresentada uma discussão baseada na seção 2.2.2 de [Cont e Tankov \(2004\)](#).

Para a uma parte dos usuários da Probabilidade e da Estatística uma variável aleatória Z é sinônimo de sua distribuição de probabilidade μ_Z e cálculos de valores esperados, somas e etc. de variáveis aleatórias, podem ser transformados em operações analíticas como integrações, cálculos de convoluções e etc., dessa vez feitas baseadas na função de distribuição. Nesse caso não há necessidade de se formalizar o espaço de probabilidade.

Vamos supor que estamos interessados em modelar observações z_1, \dots, z_n feitas de uma variável aleatória Z definida em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nesse caso vale notar que o único conjunto realmente importante é o conjunto E , no qual a variável em questão assume seus valores. De fato podemos definir o espaço de probabilidade de diversas formas.

Em alguns casos pode ser natural identificar o espaço Ω com E , ou seja, identificar a aleatoriedade de $\omega \in \Omega$ com o efeito observado. Nesse caso tomamos $Z(\omega) = \omega$ e a medida de probabilidade \mathbb{P} é formalmente idêntica a distribuição de Z . Segundo essa escolha, Ω é definido como sendo o *espaço canônico* para a variável Z . Como, nesse caso, a função Z é um mapeamento um-a-um podemos saber que cenário, ω , ocorreu baseado na observação da variável Z . Portanto qualquer outra variável aleatória W será completamente determinada pela observação de Z . Para modelos com estruturas mais ricas fica evidente a necessidade de diferenciarmos Ω , o espaço dos cenários aleatórios, de E o espaço dos valores da variável aleatória.

Um exemplo interessante no contexto desse trabalho é dado em [Cont e Tankov \(2004\)](#). Suponha que estamos interessados em modelar o log-preço de um ativo financeiro em uma data futura T por uma variável aleatória Z_1 . É razoável interpretar cada elemento ω de Ω como sendo um conjunto de fatores que influenciam o preço do ativo em questão, como, por exemplo, notícias externas, indicadores econômicos e etc.. Note que a variável ω pode não ter nem um valor numérico, diferentemente de $Z_1(\omega)$. Se quisermos agora analisar o comportamento de diversos ativos na mesma data futura T através de variáveis aleatórias Z_1, Z_2, \dots é mais natural distinguir o cenário ω dos valores observados $Z_1(\omega), Z_2(\omega), \dots$, pois podemos conhecer todos os valores $Z_1(\omega), Z_2(\omega), \dots$ e mesmo assim não saberemos qual cenário ocorreu.

Pelos exemplos apresentados acima podemos concluir que a descrição probabilística de uma variável aleatória Z pode ser reduzida ao conhecimento de sua medida de distribuição μ_Z *somente* no caso em que Z é a única fonte de aleatoriedade. Em todos os outros casos a medida de probabilidade subjacente, \mathbb{P} , contém mais informação que a distribuição da variável Z , em particular todas as relações de dependência entre Z e outras variáveis aleatórias que

forem definidas nesse espaço.

2.1.2 Filtrações e histórias

Quando estamos tratando de processos estocásticos e assumimos que seu índice será pensado como tempo gostaríamos de levar em consideração um aspecto dinâmico do fluxo de informação no tempo. Intuitivamente acreditamos que com o passar do tempo mais informação é revelada ao observador. Uma quantidade que era vista como aleatória em um certo instante t pode mudar de *status* em um instante $t' > t$. Observe que até agora não há nenhum ingrediente em nossa estrutura probabilística que leve esse fluxo de informação em consideração. Vamos introduzir então o conceito de filtração.

Definição 2.6 (Filtração). Uma filtração (ou fluxo de informação) em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma família não-decrescente de sub- σ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ tal que $\forall t \geq s, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Um espaço de probabilidade dotado de uma filtração será chamado de espaço de probabilidade filtrado.

A interpretação natural para \mathcal{F}_t é a informação conhecida até o tempo t e, como esperávamos, com o tempo vamos obtendo mais informação. Esperamos que a probabilidade de ocorrência de um certo evento aleatório mude com o passar do tempo, assim que tivermos mais informação. Para tanto poderíamos alterar a medida de probabilidade \mathbb{P} a cada instante de tempo mas, ao invés disso manteremos \mathbb{P} fixa e modelaremos o impacto de novas informações condicionando a medida a \mathcal{F}_t .

Dado que temos uma descrição do fluxo de informação através do tempo podemos diferenciar em cada instante, dada a informação relativa a ele, as quantidades que são vistas como aleatórias e as que são conhecidas. Um evento $A \in \mathcal{F}_t$ é um evento que, dada a informação até o tempo t , o observador pode verificar se ocorreu ou não. Analogamente, uma variável aleatória \mathcal{F}_t -mensurável é uma variável cujo valor será revelado em t .

Processos cujo valor no tempo t é revelado por \mathcal{F}_t são definidos em [Conte e Tankov \(2004\)](#) (Definição 2.12) como “não-antecipativos”, mas usaremos a

nomenclatura mais padrão, que define esses processos como adaptados (ver, por exemplo [Karatzas e Shreve \(1991\)](#)).

Definição 2.7 (Processo adaptado). Um processo estocástico $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ é dito ser adaptado com respeito à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ se, para todo t , o valor de Z_t é revelado em t , ou seja, a v.a. Z_t é \mathcal{F}_t -mensurável.

Observação 2.8. Obviamente o termo “não-antecipativo” é muito mais intuitivo do que “adaptado” mas usaremos o último, como já dito, por coerência com a literatura.

Vamos agora introduzir o conceito de mensurabilidade progressiva, que leva em conta o fluxo de informação e também o espaço amostral. Esse conceito está intimamente ligado ao conceito de processos adaptados, como mostra a próxima proposição (Proposição 1.13 de [Karatzas e Shreve \(1991\)](#)).

Definição 2.9 (Processo progressivamente mensurável). Um processo estocástico $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ é dito ser progressivamente mensurável com respeito a filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ se, para cada $t \geq 0$ e $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\{(s, \omega) : 0 \leq s \leq t, \omega \in \Omega, Z_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

Em outras palavras, se o mapeamento

$$\begin{aligned} ([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_t) &\longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s, \omega) &\longmapsto Z_s(\omega) \end{aligned}$$

é mensurável, para cada $t \geq 0$.

Proposição 2.10. *Se o processo estocástico $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ é adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ e toda trajetória é contínua à direita (ou a esquerda), então Z é também progressivamente mensurável com respeito a $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.*

Demonstração. Ver Proposição 1.13 de [Karatzas e Shreve \(1991\)](#). □

Quando estamos trabalhando somente com um processo estocástico $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ o fluxo de informação pode ser representado pela filtração natural (chamada de história por [Cont e Tankov \(2004\)](#)), definida como segue.

Definição 2.11 (Filtração natural). A filtração natural de um processo $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ é a σ -álgebra $(\mathcal{F}_t^Z)_{t \in [0, T]}$, onde \mathcal{F}_t^Z é a σ -álgebra gerada pelos valores passados do processo, completada pelos conjuntos de medida \mathbb{P} nula. Formalmente,

$$\mathcal{F}_t^Z = \sigma(Z_s, s \in [0, T]) \vee \mathcal{N},$$

ou seja, a menor σ -álgebra que contém todos os conjuntos de $\sigma(Z_s, s \in [0, T])$ e \mathcal{N} .

2.1.3 Tempos aleatórios

Em alguns pontos deste trabalho iremos tratar de eventos ocorrendo em tempos aleatórios. Esses tempos nada mais são do que uma variável aleatória não-negativa $\tau \geq 0$ que representa o tempo no qual um evento acontece. Dado um fluxo de informação (filtração) $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, uma pergunta natural é: dada a informação que um observador possui, \mathcal{F}_t , ele pode determinar se o evento ocorreu ($\tau \leq t$) ou não ($\tau > t$)? Se ele puder, diremos que o tempo aleatório τ é não antecipativo, ou um tempo de parada. Formalmente, temos as seguintes definições.

Definição 2.12 (Tempo de parada). Dizemos que τ é um \mathcal{F}_t -tempo de parada (tempo aleatório não antecipativo) se

$$\forall t \geq 0, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Definição 2.13 (Tempo opcional). Dizemos que τ é um \mathcal{F}_t -tempo opcional se

$$\forall t \geq 0, \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Proposição 2.14. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Todo tempo aleatório igual a uma constante não negativa é um tempo de parada.*
- (ii) *Todo tempo de parada é tempo opcional.*

(iii) Os conceitos de tempos de parada e tempos opcionais coincidem se a filtração é contínua a direita, ou seja, se

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. A demonstração de (i) é trivial, bastando somente notar que, se τ é um tempo aleatório tal que $\tau = c > 0$, então

$$\{\tau < t\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } c \geq t \\ \Omega, & \text{se } c < t, \end{cases}.$$

Para provarmos (ii) basta observarmos que

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\tau \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t,$$

pois como τ é tempo de parada então $\{\tau \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_{t-1/n} \subseteq \mathcal{F}_t, \forall n \geq 1$. Vamos agora provar (iii). Suponha que τ é um tempo opcional de uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ contínua a direita. Para m inteiro e positivo

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{+\infty} \{\tau < t + 1/n\}.$$

Como $\{\tau < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}, \forall n \geq m$, temos que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}}$ e portanto $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$, pois m é arbitrário. \square

Para o estudo de tempos de parada a proposição a seguir será bastante útil.

Proposição 2.15. *Se τ_1 e τ_2 são tempos de parada então $\tau_1 \wedge \tau_2 = \inf\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 \vee \tau_2 = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$ e $\tau_1 + \tau_2$ também são tempos de parada.*

Demonstração. As duas primeiras assertivas são triviais e a terceira decorre da seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} \{\tau_1 + \tau_2 > t\} &= \{\tau_1 = 0, \tau_2 > t\} \cup \{0 < \tau_1 < t, \tau_1 + \tau_2 > t\} \\ &\cup \{\tau_1 > t, \tau_2 = 0\} \cup \{\tau_1 \geq t, \tau_2 > 0\}. \end{aligned}$$

O primeiro, o terceiro e o quarto eventos na decomposição acima pertencem, trivialmente, a \mathcal{F}_t (basta fazermos uso da Proposição 2.14). Para o segundo evento basta notarmos que ele é igual a

$$\bigcap_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ 0 < r < t}} \{r < \tau_1 < t, t - r < \tau_2\}.$$

Desta forma a demonstração está finalizada, pois a união finita de termos em um σ -álgebra também pertence a ela. \square

O termo “tempo de parada” parece indicar que alguma coisa irá parar em τ . De fato, dado um tempo de parada τ e um processo progressivamente mensurável $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ podemos definir um processo $Z^* = (Z_t^*)_{t \in [0, T]} = (Z_{t \wedge \tau})_{t \in [0, T]}$ e esse processo continua sendo progressivamente mensurável.

Proposição 2.16. *Sejam $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ um processo progressivamente mensurável e τ um \mathcal{F}_t -tempo de parada. Então o processo parado $Z^* = (Z_t^*)_{t \in [0, T]} = (Z_{t \wedge \tau})_{t \in [0, T]}$, definido por*

$$Z_t^*(\omega) = \begin{cases} Z_t(\omega), & \text{se } t < \tau(\omega) \\ Z_{\tau(\omega)}(\omega), & \text{se } t \geq \tau(\omega), \end{cases}$$

é progressivamente mensurável.

Demonstração. Para $t \in [0, T]$ fixo, note que o mapeamento

$$\begin{aligned} ([0, t] \times \Omega) &\longrightarrow ([0, t] \times \Omega) \\ (s, \omega) &\longmapsto (\tau(\omega) \wedge s, \omega) \end{aligned}$$

é $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mensurável. Por outro lado, pela hipótese de mensurabilidade progressiva, o mapeamento

$$\begin{aligned} ([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_t) &\longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s, \omega) &\longmapsto Z_s(\omega) \end{aligned}$$

é mensurável. Portanto o mesmo vale para o mapeamento composto

$$\begin{aligned} ([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_t) &\longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s, \omega) &\longmapsto Z_{\tau(\omega) \wedge s}(\omega) \end{aligned}$$

\square

Um outro conceito interessante no que tange a mensurabilidade de processos estocásticos são os processos previsíveis, dados pela seguinte definição.

Definição 2.17. (Processo previsível)

- (i) Definimos por \mathcal{P} σ -álgebra gerada pelos processos adaptados e contínuos à esquerda;
- (ii) Um processo é chamado previsível se ele é mensurável com respeito à σ -álgebra \mathcal{P} dos processos previsíveis.

Observação 2.18. A Proposição 4.5.1 de [Revuz e Yor \(1999\)](#) nos garante que a σ -álgebra da Definição 2.17 pode tanto ser gerada pelos processos adaptados e contínuos à esquerda como pelos processos adaptados e contínuos.

Note que, claramente, todo processo progressivamente mensurável é adaptado. Vale ainda que todo processo previsível é progressivamente mensurável (ver Proposição 1.13 de [Karatzas e Shreve \(1991\)](#)). Como estaremos interessados somente em processos contínuos a observação a seguir é de extrema importância (ver Seção 8.13 de [Klebaner \(2005\)](#)).

Observação 2.19. Sob a hipótese de continuidade as três noções de mensurabilidade de processos (adaptados, progressivamente mensuráveis e previsíveis) são equivalentes.

2.2 Auto-similaridade e dependência de longo prazo

Conforme bem observado em [Cont e Tankov \(2004\)](#), apesar da maioria dos estudos teóricos serem feitos com base em observações diárias dos retornos de ativos financeiros, em situações práticas a escala de tempo pode variar de alguns segundos, para *intraday traders*, ou anos, para análises envolvendo Opções Reais. Para analistas quantitativos é, portanto, interessante saber como as propriedades estatísticas dos retornos de ativos financeiros variam através de mudanças de escala. Nesta seção vamos definir dois conceitos

básicos que serão extremamente importantes durante todo esse trabalho: *auto-similaridade* e *dependência de longo prazo*.

2.2.1 Auto-similaridade

A idéia básica da auto-similaridade corresponde à procura de propriedades estatísticas que se mantêm inalteradas por agregação temporal, ou seja, mudanças de escala. No âmbito financeiro as idéias de auto-similaridade emergiram após o trabalho seminal de Mandelbrot, [Mandelbrot \(1963\)](#). Esses trabalhos ganharam novo fôlego na década de 1990, devido à disponibilidade de dados em altíssima frequência e após estudos apontando a presença dessa propriedade em diversos produtos financeiros (ver [Seção 3](#)).

Definição 2.20. Um processo estocástico Z é dito ser auto-similar se existe $H > 0$ tal que, para qualquer fator de escala $c > 0$, os processos $(Z_{ct})_{t \in \mathbb{R}}$ e $(c^H Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ têm a mesma lei, ou seja,

$$(Z_{ct})_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} (c^H Z_t)_{t \in \mathbb{R}}.$$

Nesse contexto H é chamado de expoente de auto-similaridade.

O parâmetro H é conhecido na literatura como *expoente de Hurst* em homenagem ao hidrologista inglês Harold Edwin Hurst que, em 1950, estudou as cheias anuais do rio Nilo (ver [Hurst \(1951\)](#)). Foi ele também quem desenvolveu a estatística R/S , que será tratada na [Seção 4.3](#).

Note que um processo Z auto-similar não degenerado (isto é, não é verdade que $Z \equiv 0$) com $H > 0$ e $c > 0$ não pode ser estacionário. Caso existisse tal processo teríamos que existiria um instante de tempo $t \in \mathbb{R}$ tal que $Z_t \neq 0$ com probabilidade positiva e, portanto:

$$Z_t \stackrel{d}{=} Z_{ct} \stackrel{d}{=} c^H Z_t.$$

Desta forma conseguimos uma contradição ao tomarmos $c \rightarrow +\infty$.

Neste trabalho estaremos interessados em analisar os processos auto-similares com incrementos estacionários, ou seja, satisfazendo a definição abaixo.

Definição 2.21. Diremos que um processo estocástico $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ tem incrementos estacionários se, para todo $h > 0$,

$$(Z_{t+h} - Z_h)_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} (Z_t - Z_0)_{t \in \mathbb{R}}.$$

Como veremos a seguir processos auto-similares com incrementos estacionários são interessantes para aplicações devido a algumas propriedades.

Proposição 2.22. *Seja Z um processo auto-similar (com expoente de Hurst $H > 0$), incrementos estacionários e variância finita - ou seja, $\mathbb{E}[Z_t^2] < +\infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então as seguintes propriedades se verificam:*

- (i) $Z_0 = 0$, \mathbb{P} - q.c.;
- (ii) $H \neq 1 \Rightarrow \mathbb{E}[Z_t] = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
- (iii) $Z_{-t} \stackrel{d}{=} -Z_t$;
- (iv) $\text{Var}[Z_t] = \sigma^2 |t|^{2H}$, onde $\sigma^2 = \text{Var}[Z_1]$;
- (v) a função de covariâncias $\Gamma_H(s, t) = \mathbb{E}[Z_s Z_t] - \mathbb{E}[Z_s] \mathbb{E}[Z_t]$, para $s, t \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\Gamma_H(s, t) = \frac{\sigma^2}{2} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}); \quad (2.1)$$

- (vi) o expoente de Hurst H satisfaz $H \leq 1$.

Demonstração. Para provarmos (i) basta notar que $Z_0 = Z_{c0} \stackrel{d}{=} c^H Z_0$, para qualquer $c > 0$. A veracidade de (ii) decorre de duas simples observações: pela auto-similaridade $\mathbb{E}[Z_{2t}] = 2^H \mathbb{E}[Z_t]$, mas, por outro lado, a estacionaridade dos incrementos implica que $\mathbb{E}[Z_{2t}] = \mathbb{E}[Z_{2t} - Z_t] + \mathbb{E}[Z_t] = 2\mathbb{E}[Z_t]$.

Pela propriedade (i) e a estacionaridade dos incrementos temos que $Z_{-t} = Z_{-t} - Z_0 \stackrel{d}{=} Z_0 - Z_t = -Z_t$, o que prova (iii). Da propriedade (iii) e a auto-similaridade, $\mathbb{E}[Z_t^2] = \mathbb{E}[Z_{|t| \text{sign}(t)}^2] = |t|^{2H} \mathbb{E}[Z_1^2] = |t|^{2H} \sigma^2$ o que prova (iv). Se $\sigma^2 = 1$ diremos que o processo Z é padrão.

A propriedade (v) decorre de (iv) e da estacionaridade dos incrementos.

De fato, para $H \neq 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma_H(s, t) &= \mathbb{E}[Z_s Z_t] \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[Z_s^2] + \mathbb{E}[Z_t^2] - \mathbb{E}[(Z_s - Z_t)^2]) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}).\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Z_2|] &= \mathbb{E}[|Z_2 - Z_1 + Z_1|] \\ &\leq \mathbb{E}[|Z_2 - Z_1|] + \mathbb{E}[|Z_1|] \\ &= 2\mathbb{E}[|Z_1|]\end{aligned}$$

e, por outro lado, pela auto-similaridade, $\mathbb{E}[|Z_2|] = 2^H \mathbb{E}[|Z_1|]$. Portanto temos que $2^H \leq 2 \Rightarrow H \leq 1$, o que prova (vi) e, por conseguinte, a proposição. \square

Para provarmos que de fato existe um processo auto-similar (com expoente de Hurst $H \in (0, 1]$) e incrementos estacionários precisamos mostrar que a função de covariâncias $\Gamma_H(s, t)$ em (2.1) está bem definida. Para tal feito será de grande utilidade o seguinte Teorema que pode ser encontrado na seção 4.1 de [Brockwell e Davis \(1991\)](#).

Teorema 2.23. *Uma função $R(s, t)$ é uma função de covariâncias se, e somente se, ela é não-negativa definida, ou seja, $\forall t_1, \dots, t_n, \forall u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R(t_i, t_j) u_i u_j \geq 0.$$

A demonstração de que a função $\Gamma_H(s, t)$ definida em (2.1) é não-negativa definida é bastante elegante será baseada no artigo “*Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens*” que pode ser encontrado em [Doukhan et al. \(2003\)](#).

Proposição 2.24. *Seja $H \in (0, 1]$. A função*

$$R_H(s, t) = (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

para $s, t \in [0, T]$, é não-negativa definida.

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$. A demonstração está dividida em três passos.

Passo 1:

Vamos ver cada u_i como sendo a massa em seu respectivo ponto t_i . Agora vamos adicionar uma massa $u_0 = -\sum_{i=1}^n u_i$ na origem, $t_0 = 0$. Desta forma, $\sum_{i=0}^n u_i = 0$ e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_H(t_i, t_j) u_i u_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) u_i u_j \\ &= - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |t_i - t_j|^{2H} u_i u_j, \end{aligned}$$

pois, por exemplo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |t_i|^{2H} u_i u_j &= \sum_{i=1}^n |t_i|^{2H} u_i \sum_{j=1}^n u_j \\ &= - \sum_{i=1}^n |t_i|^{2H} u_i u_0 \\ &= - \sum_{i=1}^n |t_i - t_0|^{2H} u_i u_0. \end{aligned}$$

Passo 2:

Para qualquer constante $c > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e^{-c|t_i - t_j|^{2H}} u_i u_j &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (e^{-c|t_i - t_j|^{2H}} - 1) u_i u_j \\ &= -c \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |t_i - t_j|^{2H} u_i u_j + o(c), \end{aligned}$$

quando $c \rightarrow 0$. É suficiente então provar que

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e^{-c|t_i - t_j|^{2H}} u_i u_j \geq 0.$$

Passo 3:

Note que a função $e^{-c|t|^{2H}}$, $0 < H \leq 1$, é uma função característica de uma variável aleatória do tipo conhecido como 2H-estável, digamos, ξ com expoente de escala $c^{1/2H}$ (ver, por exemplo, [Billingsley \(2008\)](#)). Ou seja, $\mathbb{E}[e^{it\xi}] = e^{-c|t|^{2H}}$ e, portanto,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e^{-c|t_i - t_j|^{2H}} u_i u_j = \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^n u_i e^{it_i \xi} \right|^2 \right] \geq 0.$$

□

Para provarmos a existência de um processo estocástico com média zero e função de covariâncias $\Gamma_H(s, t)$ como em (2.1) necessitaremos de um resultado de consistência de suas distribuições finito-dimensionais. Este resultado pode ser encontrado na seção 2.2.A de [Karatzas e Shreve \(1991\)](#) ou no Apêndice II de [Billingsley \(1968\)](#).

Definição 2.25. Seja $\mathbf{T} = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) : t_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$. Suponha que para cada $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ temos uma medida de probabilidade $Q_{\mathbf{t}}$ definida em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Essa família de distribuições finito-dimensionais, é dita consistente se satisfaz as duas condições abaixo.

- (i) se $\mathbf{s} = (t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ é uma permutação de $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, então para qualquer $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ temos

$$Q_{\mathbf{t}}(A_1 \times \dots \times A_n) = Q_{\mathbf{s}}(A_{t_1} \times \dots \times A_{t_n});$$

- (ii) se $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ com $n \geq 1$, $\mathbf{s} = (t_1, \dots, t_{n-1})$, e $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$, então

$$Q_{\mathbf{t}}(A \times \mathbb{R}) = Q_{\mathbf{s}}(A).$$

Teorema 2.26 (de consistência de Daniell-Kolmogorov). *Seja $\{Q_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}}$ uma família de distribuições finito-dimensionais consistente. Então existe uma medida de probabilidade \mathbb{P} em $(\mathbb{R}^{[0, +\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, +\infty)}))$ tal que*

$$Q_{\mathbf{t}}(A) = \mathbb{P}[\omega \in \mathbb{R}^{[0, +\infty)} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in A],$$

onde $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Agora considere o conjunto de tempos $\mathbf{T} = \{t = (t_1, \dots, t_n) : t_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ e a função de covariâncias $\Gamma_H(s, t)$ definida em (2.1), para $s, t \in [0, T]$ e $\sigma^2 > 0$. Pela Proposição 2.24 podemos garantir que existe um vetor aleatório Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n} Gaussiano com média zero e matriz de covariâncias $\Gamma = (\Gamma_H(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ que induz uma medida de probabilidade $Q_{\mathbf{t}}$ em \mathbb{R}^n , onde $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$. Portanto, pelo Teorema 2.26, podemos concluir que existe uma única medida Q em \mathbb{R}^∞ que tem $Q_{\mathbf{t}}$ como suas distribuições finito-dimensionais. Equivalentemente, podemos afirmar que existe um processo Gaussiano $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ com função de média identicamente nula e função de covariâncias

$$\text{Cov}[Z_s, Z_t] = \Gamma_H(s, t) = \frac{\sigma^2}{2} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

onde $\sigma^2 = \text{Var}[Z_1]$. Vale notar que, como um processo Gaussiano de média zero é univocamente determinado pela sua função de covariâncias, a estrutura da função definida em (2.1) (mais precisamente, o termo σ^2 que aparece em evidência) nos garante que, para um dado $H \in (0, 1]$, todos os processos Gaussianos de média zero, auto-similares (com expoente de Hurst H) e incrementos estacionários diferem somente de uma constante multiplicativa. Desta forma somos levados a fazer a seguinte definição.

Definição 2.27. (Movimento Browniano fracionário) Dado $H \in (0, 1)$, um processo Gaussiano de média zero, auto-similar (com expoente de Hurst H) e incrementos estacionários, $B^H = (B_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$, é chamado de movimento Browniano fracionário (mBf, mB – se $H = 1/2$) e será padrão se $\sigma^2 = \text{Var}[B_1^H] = 1$.

Uma definição alternativa do movimento Browniano fracionário pode ser feita através da representação de Mandelbrot-van Ness, [Mandelbrot e Van Ness \(1968\)](#).

Definição 2.28. (Movimento Browniano fracionário) O mBf pode ser definido como

$$B_t^H = k \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ ((t-s)^+)^{H-1/2} - (s^-)^{H-1/2} \right\} dB_s,$$

onde $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ é um movimento Browniano e

$$k^{-2} = (2H)^{-1} + \int_0^{+\infty} ((1+v)^{H-1/2} - v^{H-1/2})^2 dv$$

é uma constante normalizadora definida de forma que

$$\mathbb{E}[(B_s^H - B_t^H)^2] = |t - s|^{2H}.$$

Observações 2.29. (i) Note que quando $H = 1/2$ o mBf padrão reduz-se ao movimento Browniano, pois

$$\begin{aligned} \Gamma_{1/2}(s, t) &= \mathbb{E}[B_s^{1/2} B_t^{1/2}] \\ &= \frac{1}{2}(|s| + |t| - |t - s|) \\ &= \begin{cases} s + t - (t - s) = s, & \text{se } s \leq t \\ s + t - (s - t) = t, & \text{se } t \leq s, \end{cases} \\ &= \min\{s, t\} \end{aligned}$$

(ii) O caso $H = 1$ foi excluído da definição por sua simplicidade. Este processo estocástico nada mais é do que $B_t^1 = tB_1^1$, ou seja, uma reta com coeficiente angular aleatório, igual a B_1^1 .

2.2.2 O movimento Browniano fracionário

Esta seção será dedicada ao estudo de algumas propriedades interessantes do processo estocástico construído na seção anterior: o movimento Browniano fracionário.

Hölder continuidade

É interessante notar que o conceito de auto-similaridade da Definição 2.20 nos diz que as distribuições escalam, e não os caminhos do processo. De fato, pela auto-similaridade, temos que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $B_t^H \stackrel{d}{=} t^H B_1$ e, portanto,

$$F_t(x) = \mathbb{P}[B_t^H \leq x] = \mathbb{P}[t^H B_1 \leq x] = F_1\left(\frac{x}{t^H}\right).$$

Analogamente à demonstração da continuidade dos caminhos do movimento Browniano feita em Karatzas e Shreve (1991), seção 2.2.B, vamos agora provar o mesmo resultado para o mBf. Note que, assim como no livro de Karatzas e Shreve, nossa construção do mBf foi feita no espaço

amostral $\mathbb{R}^{[0,+\infty)}$, espaço de todas as funções em $[0, +\infty)$, ao invés do espaço $C([0, +\infty))$, das funções contínuas no mesmo intervalo. Para superarmos esse problema lançaremos mão do seguinte teorema (ver seção 2.2.B de [Karatzas e Shreve \(1991\)](#)).

Teorema 2.30. *Suponha que o processo $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz a condição*

$$\mathbb{E}[|Z_{t_1} - Z_{t_2}|^\alpha] \leq C|t_1 - t_2|^{1+\beta},$$

para $0 \leq t_1, t_2 \leq T$ e constantes positivas α, β e C . Então existe uma modificação contínua $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de Z , que é localmente Hölder contínua com expoente γ , para todo $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. Ou seja,

$$\mathbb{P} \left[\left\{ \omega : \sup_{\substack{0 < t_1, t_2 < h(\omega) \\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}}} \frac{|\tilde{Z}_{t_1}(\omega) - \tilde{Z}_{t_2}(\omega)|}{|t_1 - t_2|^\gamma} \leq \delta \right\} \right] = 1,$$

onde $h(\omega)$ é uma variável aleatória quase certamente positiva e δ é uma constante apropriada.

Proposição 2.31. *O mBf $B^H = (B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ é Hölder contínuo para todo expoente $\gamma < H$.*

Demonstração. Note que, se $B^H = (B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ é um mBf (com $H \in (0, 1)$), pela estacionariedade dos incrementos e a auto-similaridade temos que, para $t_1, t_2 \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|B_{t_1}^H - B_{t_2}^H|^\alpha] &= \mathbb{E}[|B_{|t_1-t_2|}^H - B_0^H|^\alpha] \\ &= \mathbb{E}[|B_{|t_1-t_2|}^H|^\alpha] \\ &= |t_1 - t_2|^{\alpha H} \mathbb{E}[|B_1^H|^\alpha]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, se tomarmos $\alpha > 1/H$ e aplicarmos o Teorema 2.30 podemos concluir que existe uma modificação do mBf que é Hölder contínua para todo expoente $\gamma \in (0, \frac{\alpha H - 1}{\alpha})$, ou seja, todo $\gamma < H$, pois α pode ser escolhido arbitrariamente pequeno. \square

Observação 2.32. Podemos ainda mostrar que o mBf não é Hölder contínuo para expoentes maiores que H . M.A. Arcones, em [Arcones \(1995\)](#), provou uma “Lei dos logaritmos iterados” para o mBf:

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{|B_t^H|}{t^H \sqrt{\log \log t^{-1}}} = c_H,$$

onde c_H é uma constante apropriada (ver [Biagini et al. \(2008\)](#)). Baseado nisto podemos afirmar que, para t suficientemente pequeno temos

$$|B_t^H| \geq c_H t^H \sqrt{\log \log t^{-1}} - \gamma$$

que é ilimitado quando $t \rightarrow 0^+$, contrariando a hipótese de Hölder continuidade.

Por conveniência notacional, a partir de agora sempre que falarmos de um mBf estaremos nos referindo à sua modificação contínua.

Diferenciabilidade

Vale observar que, por [\(2.2\)](#) já podemos afirmar que o mBf não é L^2 -diferenciável. De fato, se tomarmos $\alpha = 2$ e mantivermos a notação $\sigma^2 = \mathbb{E}[B_1^H]$ temos que,

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{B_{t_1}^H - B_{t_2}^H}{(t_1 - t_2)} \right|^2 \right] = \sigma^2 |t_1 - t_2|^{2H-2} \rightarrow +\infty$$

quando $t_1 \rightarrow t_2$. Mas podemos ter um resultado ainda mais forte, como o da Proposição abaixo (ver [Biagini et al. \(2008\)](#)).

Proposição 2.33. *Seja $H \in (0, 1)$. Então os caminhos do mBf $B^H = (B_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ são não diferenciáveis. De fato, vale o seguinte resultado com probabilidade um:*

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \right| = +\infty$$

para todo $t_0 \in [0, +\infty)$

Demonstração. Pela auto-similaridade do mBf,

$$\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \stackrel{d}{=} (t - t_0)^{H-1} B_1^H.$$

Se considerarmos o evento

$$A(t, \omega) = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{B_s^H(\omega)}{s} \right| > d \right\},$$

então, para toda sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente para zero, temos que:

$$A(t_n, \omega) \supseteq A(t_{n+1}, \omega)$$

e

$$A(t_n, \omega) \supseteq \left\{ \left| \frac{B_{t_n}^H}{t_n} \right| > d \right\} = \{|B_1^H| > t_n^{1-H} d\}.$$

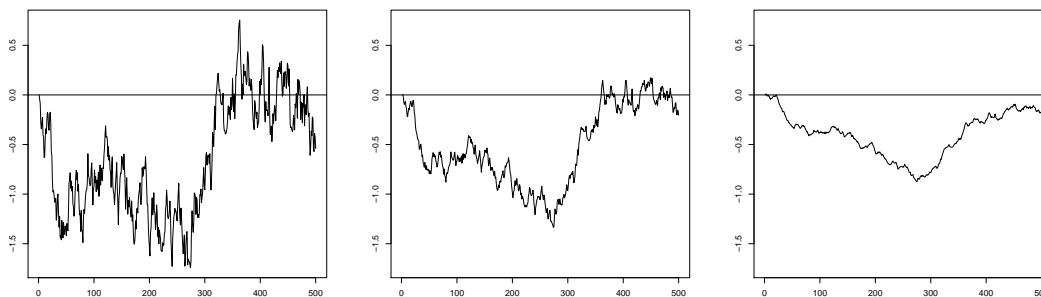
Assim, como

$$\mathbb{P} [|B_1^H| > t_n^{1-H} d] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

então

$$\mathbb{P} \left[\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \right| > d \right] \geq \mathbb{P} \left[\bigcap_{n \geq 1} A(t_n, \omega) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[A(t_n, \omega)] = 1.$$

O resultado desejado segue do fato de d ter sido escolhido arbitrariamente, podendo ser tão grande quanto quisermos. \square



(a) $H = 0,25$

(b) $H = 0,5$

(c) $H = 0,75$

Figura 2.1: Caminhos de um mBf para diferentes valores de H

O mBf não é Markoviano para $H \neq 1/2$

A demonstração de que o mBf é Markoviano se, e somente se, $H = 1/2$ faz uso da Proposição 11.7 de [Kallenberg \(1997\)](#), enunciada a seguir.

Proposição 2.34. *Um processo Gaussiano $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ com função de covariâncias $\Gamma(s, t)$ é Markoviano se, e somente se,*

$$\Gamma(s, t) = \frac{\Gamma(s, u)\Gamma(u, t)}{\Gamma(u, u)}, \text{ para } s \leq u \leq t. \quad (2.3)$$

Claramente a função de covariâncias do mBf só pode ser fatorada como acima se $H = 1/2$ (ou seja, $\Gamma(s, t) = \min\{s, t\}$) e, portanto, podemos concluir que o mBf só é Markoviano se $H = 1/2$.

O mBf não é semimartingal para $H \neq 1/2$

Para encerrar esta seção será apresentado um resultado de grande interesse para a modelagem financeira: o fato do mBf não ser um semimartingal para $H \neq 1/2$. Aqui será apresentado somente o resultado teórico, sendo deixadas suas implicações práticas para a Seção 2.3.2. A demonstração que será apresentada aqui segue o artigo [Rogers \(1997\)](#).

Antes da demonstração é conveniente fazer a definição formal de variação de um processo estocástico.

Definição 2.35. Seja $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico e considere a partição $\pi = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$. Defina

$$\mathcal{S}_p(Z, \pi) = \sum_{i=1}^n |Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}|^p.$$

A variação de ordem p deste processo é definida como

$$\mathcal{V}_p(Z, [0, T]) = \sup_{\pi} \mathcal{S}_p(Z, \pi),$$

onde o supremo acima é tomado sobre todas as partições finitas do intervalo $[0, T]$.

Proposição 2.36. *Um mBf $B^H = (B_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ é semimartingal se, e somente se, $H = 1/2$.*

Demonstração. Considere, para $p > 0$,

$$Y_{n,p} = n^{pH-1} \sum_{i=1}^n \left| B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H \right|^p.$$

Pela auto-similaridade do mBf, a sequência $(Y_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ tem a mesma distribuição que

$$\tilde{Y}_{n,p} = n^{-1} \sum_{i=1}^n |B_i^H - B_{i-1}^H|^p.$$

Como a sequência $W_i = |B_{i+1}^H - B_i^H|^p$ é estacionária (ver Proposição 2.38) podemos, pelo Teorema Ergódico (ver Breiman (1969), Capítulo 6), garantir que a sequência $\tilde{Y}_{n,p}$ converge quase certamente (em particular em L^1) para $\mathbb{E}[|B_1^H|^p]$ quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$\mathcal{V}_{n,p} = \sum_{i=1}^n \left| B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H \right|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0, & \text{se } pH > 1 \\ c_H, & \text{se } pH = 1 \\ +\infty, & \text{se } pH < 1 \end{cases},$$

onde c_H é uma constante que depende de H .

Da continuidade de B^H podemos supor que $\sup_{1 \leq i \leq n} |B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H| < 1$ e, portanto, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p = 0 &\Rightarrow \mathcal{V}_q = 0, \text{ se } q < p; \\ 0 < \mathcal{V}_p < +\infty &\Rightarrow \mathcal{V}_q < +\infty \text{ se } q > p; \\ \mathcal{V}_p = +\infty &\Rightarrow \mathcal{V}_q = +\infty \text{ se } q < p \end{aligned}$$

e todas elas decorrem do fato que $0 \leq \mathcal{V}_p < \mathcal{V}_q$ se $q < p$ e $\mathcal{V}_p > \mathcal{V}_q$ se $q > p$.

Agora suponha que $H > 1/2$, ou, equivalentemente, $H^{-1} < 2$. Tomando $p \in (H^{-1}, 2)$, temos $\mathcal{V}_p = 0$ e, pelas relações acima, $\mathcal{V}_2 = 0$. No entanto, tomando $p \in (1, H^{-1})$, $\mathcal{V}_p = +\infty$, portanto $\mathcal{V}_1 = +\infty$, o que é incoerente com a hipótese de B^H ser semimartingal.

Seja agora $H < 1/2$ ($H^{-1} > 2$). Se $p \in (2, H^{-1})$ então $\mathcal{V}_p = +\infty$, o que implica que $\mathcal{V}_2 = +\infty$. Portanto B^H não é semimartingal, pois, caso fosse, contrariaria o fato de todo semimartingal ter variação quadrática finita. \square

2.2.3 Dependência de longo prazo e os incrementos do mBf

Vamos agora focar nossa atenção nos incrementos de um processo $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auto-similar (com expoente de Hurst $H \in (0, 1)$) e incrementos estacionários. Vamos definir esse processo como sendo:

$$Y_k = Z_{k+1} - Z_k, \quad (2.4)$$

para $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.37. Se $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ é um mBf, então a sequência definida em (2.4) é chamada ruído Browniano fracionário (rBf).

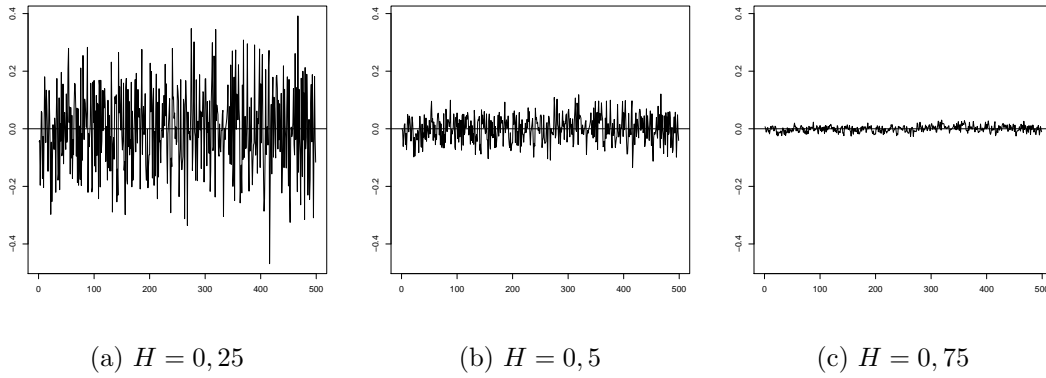


Figura 2.2: Ruídos dos caminhos da Figura 2.1

Proposição 2.38. A sequência de incrementos $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tem as seguintes propriedades:

- (i) $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é estacionária;
- (ii) $\mathbb{E}[Y_k] = 0$;
- (iii) $\mathbb{E}[Y_k^2] = \sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2]$;
- (iv) a função de auto-covariâncias do processo $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma(k) = \mathbb{E}[Y_i Y_{i+k}] = \frac{\sigma^2}{2} (|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H});$$

(v) Seja $k \neq 0$. Então

$$\gamma(k) < 0, \text{ se } 0 < H < 1/2;$$

$$\gamma(k) = 0, \text{ se } H = 1/2;$$

$$\gamma(k) > 0, \text{ se } 1/2 < H < 1;$$

(vi) se $H \neq 1/2$, então

$$\gamma(k) \sim \sigma^2 H(2H - 1) |k|^{2H-2},$$

quando $k \rightarrow +\infty$.

Demonstração. As propriedades (i) – (iv) são triviais. Vamos então provar (v). Se $1/2 < H < 1$, então a função $f(x) = x^{2H}$ é estritamente convexa, assim, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^{2H} + (k-1)^{2H}}{2} &= \frac{f(k+1) + f(k-1)}{2} \\ &> f\left(\frac{(k+1) + (k-1)}{2}\right) \\ &= f(k) = k^{2H}. \end{aligned}$$

Como $\gamma(k) = \gamma(-k)$ temos que $\gamma(k) > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. O caso $0 < H < 1/2$ é análogo, porém agora usamos o fato que $f(x) = x^{2H}$ é côncava. Para o caso $H = 1/2$ basta separarmos nos subcasos $k \geq 1$ e $k \leq -1$.

Para a demonstração do item (vi) é importante notarmos que $\gamma(k) = \gamma(-k)$. Portanto, assim como no item (v), podemos nos restringir ao caso $k \geq 1$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \frac{\sigma^2}{2} ((k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} k^{2H-2} \left\{ k^2 \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2H} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Notando que ao aplicarmos duas vezes a regra de l'Hôpital vemos que o termo entre chaves converge para $2H(2H - 1)$ quando $k \rightarrow +\infty$ e assim provamos o resultado desejado. A regra de l'Hôpital pode ser utilizada pois, em ambas as vezes, há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. \square

Definição 2.39. Diremos que uma sequência estacionária $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ exibe dependência de longo prazo se sua função de auto-covariâncias $\gamma(k) = \mathbb{E}[Y_i Y_{i+k}]$ satisfaz a seguinte relação:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(k)}{ck^{-\alpha}} = 1,$$

para alguma constante c e $\alpha \in (0, 1)$. Neste caso, a dependência entre Y_i e Y_{i+k} decai lentamente quando $k \rightarrow +\infty$ e

$$\sum_k \gamma(k) = +\infty$$

Vamos agora provar que a sequência de rBf's com $1/2 < H < 1$ exibe dependência de longo prazo no sentido da Definição 2.39. Observe que, pelo item (vi) da Proposição 2.38, a função $\gamma(k)$ tende a zero como uma função potência, quando $k \rightarrow +\infty$. No entanto, quando $1/2 < H < 1$ esse decaimento é tão lento que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(k) = +\infty$. De fato, se $S_n = \sum_{k=1}^n \gamma(k)$ então, denotando $\alpha = 2H$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left[(k-1)^\alpha - 2k^\alpha + (k+1)^\alpha \right] \\ &= (n+1)^\alpha - n^\alpha + 1^\alpha, \end{aligned}$$

por um simples argumento de somas telescópicas.

Vamos agora expandir $f(x) = (x+1)^\alpha$ em série de Taylor em torno de $x_0 = n-1$. Desta forma, $(n+1)^\alpha = n^\alpha + 2\alpha n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2})$ e, portanto,

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1)^\alpha = n^\alpha + 2\alpha n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}) - n^\alpha + 1^\alpha \\ &= 2\alpha n^{\alpha-1} + 1 + O(n^{\alpha-2}). \end{aligned}$$

Finalmente, temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma(n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \\ &= 2\alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-1} + 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} O(n^{\alpha-2}) = \begin{cases} c, & \text{se } \alpha \in (0, 1) \\ +\infty, & \text{se } \alpha \in (1, 2) \end{cases}. \end{aligned}$$

2.3 Conceitos de Finanças

Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos básicos de Finanças, dando considerável atenção à Arbitragem.

2.3.1 Estratégias de negociação

Definiremos agora algumas das restrições nas classes de estratégias que consideraremos no restante do texto.

Vamos pensar em uma estratégia como sendo um par $\Theta = (\theta^0, \theta^1)$ de processos estocásticos $\theta^0 = (\theta_t^0)_{t \in [a, b]}$ e $\theta^1 = (\theta_t^1)_{t \in [a, b]}$ assumindo valores reais. Para uso futuro, assumiremos que $\theta_{0-}^0 = \theta_{0-}^1 = X_{0-} = 0$. $\theta_t^0 X_t$ representa a quantia em dinheiro em um ativo sem risco no tempo t , ou seja, sabemos hoje quanto este ativo irá valer no futuro (pode-se pensar nisto como uma “conta no banco”) e θ_t^1 a quantidade da ação que o agente econômico possui, também no tempo t . Portanto, a evolução do valor do portfólio com a estratégia θ é dada por:

$$V_t^\theta := \theta_t^0 X_t + \theta_t^1 Y_t, \quad t \in [a, b].$$

Como desejaremos utilizar X como numerário, exigiremos que esse processo seja q.c. positivo. Definimos

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{X_t} \quad \text{e} \quad \tilde{V}_t^\theta = \frac{V_t^\theta}{X_t}, \quad t \in [a, b].$$

Obviamente precisamos fazer algumas restrições em uma estratégia para termos algum sentido financeiro. Primeiramente as estratégias têm que ser baseadas somente na informação disponível, ou seja, não podem depender de negociações ou valores dos ativos no futuro. Como discutido na Seção 2.1.2 a forma que temos de descrever a evolução da informação através do tempo é introduzindo uma família de σ -álgebras $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [a, b]}$. Neste ponto assumiremos que podemos acompanhar a evolução de X e Y e que a informação adquirida não se perde com o passar do tempo.

Vamos mostrar, na Seção 2.3.3, que podemos construir uma estratégia de arbitragem (ver Seção 2.3.2) em modelos fracionários (como o de Bachelier e Black-Scholes) utilizando somente estratégias *buy-and-hold*. Uma estratégia de

buy-and-hold é um tipo de estratégia “passiva” na qual um investidor compra o ativo financeiro (no instante τ_j , digamos) e o mantém em seu portfólio por um certo período de tempo (até o instante τ_{j+1}), mantendo-se indiferente a flutuações de curto prazo.

Definição 2.40. Seja $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [a,b]}$.

(i) O conjunto dos processos simples e previsíveis é dado por

$$\mathbf{S}(\mathcal{F}) = \left\{ g_0 \mathbb{1}_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{n-1} g_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]} : n \geq 2, a = \tau_1, \leq \dots \leq \tau_n = b; \right.$$

todos os τ'_j 's são \mathcal{F} -tempos de parada; g_0 é uma v.a.

real e \mathcal{F}_a -mensurável e todos os outros g'_j 's são v.a.'s

reais e \mathcal{F}_{τ_j} -mensuráveis $\left. \right\}$

A classe das estratégias simples e previsíveis é dada por

$$\Theta^{\mathbf{S}}(\mathcal{F}) = \{ \theta = (\theta^0, \theta^1) : \theta^0, \theta^1 \in \mathbf{S}(\mathcal{F}) \}$$

(ii) O conjunto dos processos quase simples e previsíveis é dado por

$$\mathbf{qS}(\mathcal{F}) = \left\{ g_0 \mathbb{1}_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{+\infty} g_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]} : a = \tau_1 \leq \tau_2 \dots \leq b; \right.$$

todos os τ'_j 's são \mathcal{F} -tempos de parada; g_0 é uma v.a.

real e \mathcal{F}_a -mensurável; todos os outros g'_j 's são v.a.'s

reais e \mathcal{F}_{τ_j} -mensuráveis; $\mathbb{P}[\exists j : \tau_j = b] = 1 \left. \right\}$.

A classe das estratégias quase simples e previsíveis é dada por

$$\Theta^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F}) = \{ \theta = (\theta^0, \theta^1) : \theta^0, \theta^1 \in \mathbf{qS}(\mathcal{F}) \}$$

Note que na definição acima $\mathbf{S}(\mathcal{F}) \subset \mathbf{qS}(\mathcal{F})$ e, conseqüentemente, $\Theta^{\mathbf{S}}(\mathcal{F}) \subset \Theta^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F})$. Além disto, as datas de transação poderiam ter sido fixadas previamente, mas como na realidade o investidor não as conhece de antemão a decisão de comprar ou vender na data τ_j é tomada com base na informação disponível até o instante τ_j . Por isso exigimos que os τ'_j 's sejam \mathcal{F} -tempos

de parada. Como a nova composição do portfólio g_j é escolhida baseada na informação avaliável até τ_j faz sentido fazermos a exigência de que as variáveis g_j sejam \mathcal{F}_{τ_j} -mensuráveis.

Definição 2.41. Para $\theta^1 = g_0 \mathbb{1}_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{+\infty} g_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j-1}]}$ $\in \mathbf{qS}(\mathcal{F})$ definimos

$$(\theta^1 \cdot Y)_t = \sum_{j=1}^{+\infty} g_j (Y_{\tau_{j+1} \wedge t} - Y_{\tau_j \wedge t}).$$

Vale observar que a soma definida acima é, quase certamente, finita pois $\mathbb{P}[\exists j : \tau_j = b] = 1$ e, como Y é progressivamente mensurável, o processo $(\theta^1 \cdot Y)_t$ também o é.

Estaremos interessados em trabalhar com estratégias que (i) não recebem aportes de capital ao longo do tempo e (ii) todos os ganhos obtidos são reinvestidos. Essas serão as chamadas estratégias auto-financiáveis, conceito formalizado na definição a seguir.

Definição 2.42 (Estratégia auto-financiável). Seja $\theta = (\theta^0, \theta^1) \in \Theta^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F})$. Então existem tempos de parada $a = \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq b$ tais que θ^0 e θ^1 podem ser escritos como

$$\theta^0 = f_0 \mathbb{1}_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{+\infty} f_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j-1}]}$$
 e $\theta^1 = g_0 \mathbb{1}_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{+\infty} g_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j-1}]}$.

Diremos que θ é uma estratégia auto-financiável para (X, Y) se, quase certamente, para todo $j \geq 1$, $k = 1, \dots, j$ e $l \geq 0$,

$$\mathbb{1}_{\{\tau_{j-k} < \tau_{j-k+1} = \tau_{j+l} < \tau_{j+l+1}\}} \{ (f_{j+l} - f_{j-k})X_{\tau_j} + (g_{j+l} - g_{j-k})Y_{\tau_j} = 0 \} = 1. \quad (2.5)$$

Definimos ainda os seguintes conjuntos:

$$\Theta_{af}^{\mathbf{S}}(\mathcal{F}) = \{ \theta \in \Theta^{\mathbf{S}}(\mathcal{F}) : \theta \text{ é auto-financiável para } (X, Y) \}$$

$$\Theta_{af}^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F}) = \{ \theta \in \Theta^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F}) : \theta \text{ é auto-financiável para } (X, Y) \}$$

Observação 2.43. O conjunto utilizado na definição de estratégia auto-financiável pode ser reescrito como

$$\{ \tau_{j-k} < \tau_{j-k+1} = \tau_{j-k+2} = \dots = \tau_j = \tau_{j+1} = \dots = \tau_{j+l} < \tau_{j+l+1} \}$$

e assim vemos que a relação definida em (2.5) independe da representação da estratégia θ .

Proposição 2.44. *Seja $\theta = (\theta^0, \theta^1) \in \Theta^{\text{qS}}(\mathcal{F})$. As seguintes assertivas são equivalentes:*

- (i) θ é auto-financiável para (X, Y) ;
- (ii) $V_t^\theta = V_a^\theta + (\theta^0 \cdot X)_t + (\theta^1 \cdot Y)_t$ q.c. para todo $t \in [a, b]$;
- (iii) θ é auto-financiável para $(1, \tilde{Y})$;
- (iv) $\tilde{V}_t^\theta = \tilde{V}_a^\theta + (\theta^1 \cdot \tilde{Y})_t$ q.c. para todo $t \in [a, b]$.

A proposição acima nos garante que se estamos trabalhando com uma estratégia auto-financiáveis $\theta = (\theta^0, \theta^1)$ só precisamos observar o processo θ^1 para caracterizarmos perfeitamente a dinâmica do processo de valor do portfólio (com ativo livre de risco como numerário). Para θ auto-financiável vale notar que $\theta_t^0 = \tilde{V}_a^\theta + (\theta^1 \cdot \tilde{Y})_t - \theta_t^1 \tilde{Y}_t$, para $t \in [a, b]$.

Demonstração. (da Proposição 2.44) Seja $a = \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq b$ uma sequência crescente de \mathcal{F} -tempos de parada tal que

$$\theta^0 = f_0 \mathbb{1}_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{+\infty} f_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j-1}]} \quad \text{e} \quad \theta^1 = g_0 \mathbb{1}_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{+\infty} g_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j-1}]}.$$

(i) \implies (ii): Por (i) segue que $\exists \Omega' \subset \Omega$, mensurável, com $\mathbb{P}[\Omega'] = 1$ tal que para cada $\omega \in \Omega'$ vale a relação (2.5) para todo $j \geq 1$, $k = 1, \dots, j$ e $l \geq 0$, simultaneamente.

Para $t = a$ temos

$$\begin{aligned} (\theta^0 \cdot X)_a &= \sum_{j=1}^{+\infty} f_j (X_{\tau_{j+1} \wedge a} - X_{\tau_j \wedge a}) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} f_j (X_a - X_a) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, $(\theta^1 \cdot Y)_a = 0$ e a fórmula em (ii) é válida para todo $\omega \in \Omega'$. Além disto $\exists \Omega'' \subset \Omega'$, também mensurável, e com $\mathbb{P}[\Omega''] = 1$ tal que, para

todo $\omega \in \Omega''$ existe, para todo $t \in (a, b]$, um $j \in \mathbb{N}$ tal que $t \in (\tau_j, \tau_{j+1}]$ e

$$\begin{aligned}
V_a^\theta + (\theta^0 \cdot X)_t + (\theta^1 \cdot Y)_t &= f_0 X_a + g_0 Y_a + \sum_{i=1}^{j-1} f_i (X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}) \\
&\quad + f_j (X_t - X_{\tau_j}) + \sum_{i=1}^{j-1} g_i (Y_{\tau_{i+1}} - Y_{\tau_i}) + g_j (Y_t - Y_{\tau_j}) \\
&= f_0 X_{\tau_1} + \sum_{i=1}^{j-1} f_i X_{\tau_{i+1}} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i X_{\tau_i} - f_j X_{\tau_j} + g_0 Y_{\tau_1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{j-1} g_i Y_{\tau_{i+1}} - \sum_{i=1}^{j-1} g_i Y_{\tau_i} - g_j Y_{\tau_j} + f_j X_t + g_j Y_t \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} f_i X_{\tau_{i+1}} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i X_{\tau_i} + \sum_{i=1}^{j-1} g_i Y_{\tau_{i+1}} - \sum_{i=1}^{j-1} g_i Y_{\tau_i} \\
&\quad + f_j X_t + g_j Y_t \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} (f_{i-1} - f_i) X_{\tau_i} + \sum_{i=1}^{j-1} (g_{i-1} - g_i) Y_{\tau_i} + f_j X_t + g_j Y_t \\
&= f_j X_t + g_j Y_t \\
&= \theta_t^0 X_t + \theta_t^1 Y_t = V_t^\theta
\end{aligned}$$

o que prova (ii).

(ii) \implies (i): Sejam $j \geq 1$, $k = 1, \dots, j$ e $l \geq 0$. Quase certamente no conjunto $\{\tau_{j-k} < \tau_{j-k+1} = \tau_{j+l} < \tau_{j+l+1}\}$ temos que

$$\begin{aligned}
&(f_{j+l} - f_{j-k})X_{\tau_j} + (g_{j+l} - g_{j-k})Y_{\tau_j} \\
&= (f_{j+l}X_{\tau_{j+l+1}} + g_{j+l}Y_{\tau_{j+l+1}}) - (f_{j-k}X_{\tau_j} + g_{j-k}Y_{\tau_j}) \\
&\quad - f_{j+l}(X_{\tau_{j+l+1}} - X_{\tau_j}) - g_{j+l}(Y_{\tau_{j+l+1}} - Y_{\tau_j}) \\
&= (\theta_{\tau_{j+l+1}}^0 X_{\tau_{j+l+1}} + \theta_{\tau_{j+l+1}}^1 X_{\tau_{j+l+1}}) - (\theta_{\tau_j}^0 X_{\tau_j} + \theta_{\tau_j}^1 Y_{\tau_j}) \\
&\quad - \left[\theta_a^0 X_a + \theta_a^1 Y_a + \sum_{i=1}^{j-1} f_i (X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}) + \sum_{i=1}^{j-1} g_i (Y_{\tau_{i+1}} - Y_{\tau_i}) \right] \\
&\quad + \left[\theta_a^0 X_a + \theta_a^1 Y_a + \sum_{i=1}^{j-1} f_i (X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}) + \sum_{i=1}^{j-1} g_i (Y_{\tau_{i+1}} - Y_{\tau_i}) \right] \\
&= V_{\tau_{j+l+1}}^\theta - V_{\tau_j}^\theta - V_{\tau_{j+l+1}}^\theta + V_{\tau_j}^\theta = 0.
\end{aligned}$$

Isto prova (i). A equivalência entre (i) e (iii) é trivial e a equivalência entre (iii) e (iv) pode ser mostrada de forma análoga a $(i) \iff (ii)$. \square

2.3.2 Arbitragem

Um dos conceitos mais importantes na construção de modelos matemáticos para o mercado financeiro é o de arbitragem. Informalmente, o conceito de arbitragem é a possibilidade de obter lucro sem risco e sem investimento de capital em um mercado financeiro.

Freddy Delbaen e Walter Schachermayer em [Delbaen e Schachermayer \(2004\)](#) ilustram o conceito de arbitragem com uma anedota:

Um professor de finanças e uma pessoa “normal” estão andando em uma rua, e a pessoa “normal” vê uma nota de R\$100 na calçada. Quando a pessoa “normal” tenta pegá-la o professor de finanças diz: “Não tente fazer isso. É absolutamente impossível que aí exista uma nota de R\$100. De fato, se ela estivesse realmente aí, alguma outra pessoa já a teria apanhado”.

Consideremos agora um exemplo real. Suponha que duas negociações Real versus Dólar estejam acontecendo simultaneamente em duas bolsas, digamos em São Paulo e Nova Iorque. Vamos assumir, por simplicidade, que em São Paulo a taxa Real/Dólar é 1:1. Então é óbvio que em Nova Iorque a taxa deve ser, também, 1:1. Vamos agora entender o porquê. Suponha, por absurdo, que uma pessoa pode comprar, em Nova Iorque, um Real por US\$0.999. Então, de fato, os chamados *arbitrageurs* (“arbitradores”, aquelas pessoas com dois telefones nas mãos e três telas em sua frente) iriam rapidamente comprar Reais em Nova Iorque e, simultaneamente, vender a mesma quantidade de Reais em São Paulo, mantendo a margem em seus bolsos. Note que, por não existirem restrições nessa negociação os *arbitrageurs* fariam isto em uma escala tão grande quanto possível.

Uma situação como a descrita acima nos leva a definir um conceito formal de arbitragem. Usaremos as seguintes definições.

Definição 2.45. Seja ξ uma variável aleatória assumindo valores em $[0, +\infty]$ tal que $P[\xi > 0] > 0$.

- (i) Uma sequência de estratégias $(\theta(n))_{n=1}^{+\infty}$ é um ξ -FLVR (*Free Lunch with Vanishing Risk*) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\tilde{V}_b^{\theta(n)} - \tilde{V}_a^{\theta(n)} \right) = \xi \quad \text{em probabilidade;}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ess sup} \left(\tilde{V}_b^{\theta(n)} - \tilde{V}_a^{\theta(n)} \right)^- = 0,$$

onde o supremo essencial de uma variável aleatória é definido como $\text{ess sup } X = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\}] = 0\}$.

Diremos que $(\theta(n))_{n=1}^{+\infty}$ é um *Free Lunch with Vanishing Risk (FLVR)* se é um ξ' -FLVR para alguma variável aleatória ξ' em $[0, +\infty]$, com $\mathbb{P}[\xi' > 0] > 0$.

- (ii) Uma estratégia θ é uma ξ -arbitragem se

$$\mathbb{P}[\tilde{V}_b^\theta - \tilde{V}_a^\theta = \xi] = 1.$$

Diremos que θ é uma arbitragem se é uma ξ' -arbitragem para alguma variável aleatória ξ' em $[0, +\infty]$, com $\mathbb{P}[\xi' > 0] > 0$.

- (iii) Uma estratégia θ é uma arbitragem forte se existe $c > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[\tilde{V}_b^\theta - \tilde{V}_a^\theta \geq c] = 1$$

Ainda que trabalhemos nos conjuntos de estratégias possíveis da Definição 2.40, $\Theta_{af}^S(\mathcal{F})$ e $\Theta_{af}^{aS}(\mathcal{F})$, podemos ter possibilidades de arbitragem, mesmo no modelo padrão de Black-Scholes (ou seja, no nosso modelo de Black-Scholes fracionário com $H = 1/2$). Uma dessas possibilidades de arbitragem foi chamada de *doubling strategy* (ou “estratégia do dobro”) por Harrison e Kreps em [Harrison e Kreps \(1979\)](#). A idéia desse tipo de estratégia fica clara no caso discreto, como exemplificado abaixo.

Exemplo 2.46. Suponha que em um cassino existe um roleta na qual podemos apostar nos números pretos ou nos vermelhos e as duas cores tem a mesma probabilidade de serem sorteadas. A roleta paga o dobro se sair a cor que escolhemos e nada se sair a outra. A estratégia começa com o seguinte: pegamos um dólar emprestado (usaremos dólares como unidade monetária nesse exemplo devido a proibição de jogos de azar no Brasil) e apostamos no vermelho.

Se sair o vermelho, ganhamos dois dólares, pagamos a dívida e saímos do jogo com um dólar. Se a bola cair em um número preto perdemos um dólar mas pegamos outros dois emprestados e apostamos novamente no vermelho. Caso o resultado desta vez seja um número vermelho ganhamos quatro dólares, pagamos os três que tínhamos de dívida e saímos do jogo com um dólar. Caso contrário pegamos um novo empréstimo de quatro dólares e etc..

Genericamente, após n rodadas se ainda não tivermos saído do jogo teremos perdido

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

dólares, pegamos um empréstimo de mais 2^n dólares e a dívida total passa a somar $2^{n+1} - 1$ dólares. Se ganharmos pagamos o débito e saímos com um dólar. Note que a probabilidade de ganharmos esse jogo após um número infinito de partidas é

$$2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n} + \dots = 1.$$

e precisaríamos de crédito ilimitado para levarmos a cabo esta estratégia. Mas note que, apesar de um número infinito de jogadas ser necessário, poderíamos fazê-las, todas, em um intervalo finito de tempo (pois, por hipótese, podemos transacionar em qualquer instante de tempo).

A idéia da estratégia acima pode ser estendida para modelos a tempo contínuo, como, por exemplo, o modelo clássico de Black-Scholes. A primeira vez que foi notado que este tipo de estratégia de arbitragem podia ser banida do modelo de Black-Scholes foi no trabalho de [Harrison e Pliska \(1981\)](#), no entanto, assim como [Cheridito \(2003\)](#) vamos usar a condição de admissibilidade de [Delbaen e Schachermayer \(1994\)](#) que é mais liberal do que a primeira, mas restritiva o suficiente para deixar o modelo de Black-Scholes livre de arbitragem.

Definição 2.47 (Estratégia admissível). Para $c \geq 0$, diremos que uma estratégia $\theta \in \Theta_{af}^{qs}(\mathcal{F})$ é c -admissível se

$$\inf_{t \in [a,b]} \left(\tilde{V}_t^\theta - \tilde{V}_a^\theta \right) = \inf_{t \in [a,b]} \left(\theta^1 \cdot \tilde{Y} \right)_t \geq -c.$$

Diremos que uma estratégia é admissível se ela é c -admissível para algum $c \geq 0$. Definimos ainda as seguintes classes de estratégias:

$$\Theta_{af,adm}^{\mathbf{S}}(\mathcal{F}) = \left\{ \theta \in \Theta_{af}^{\mathbf{S}}(\mathcal{F}) : \theta \text{ é admissível} \right\},$$

$$\Theta_{af,adm}^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F}) = \left\{ \theta \in \Theta_{af}^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F}) : \theta \text{ é admissível} \right\}.$$

2.3.3 Arbitragem em modelos fracionários

Como já sabemos que o mBf não é um semimartingal os resultados de [Delbaen e Schachermayer \(1994\)](#) já nos garantem que existem formas de ganho certo de capital. Nosso objetivo nessa Seção será apresentar uma estratégia explícita de arbitragem nos modelos de Bachelier e Black-Scholes fracionários, baseada no trabalho de Patrick Cheridito [Cheridito \(2003\)](#).

Teorema 2.48. *Sejam $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$ um mBf, $T \in (0, +\infty)$, $\nu \in C^1[0, T]$ e $\sigma > 0$. Nos quatro casos abaixo,*

- (i) $\tilde{Y}_t = \nu_t + \sigma B_t^H$, $H \in (1/2, 1)$, $\forall t \in [0, T]$
- (ii) $\tilde{Y}_t = \exp \left\{ \nu_t + \sigma B_t^H \right\}$, $H \in (1/2, 1)$, $\forall t \in [0, T]$
- (iii) $\tilde{Y}_t = \nu_t + \sigma B_t^H$, $H \in (0, 1/2)$, $\forall t \in [0, T]$
- (iv) $\tilde{Y}_t = \exp \left\{ \nu_t + \sigma B_t^H \right\}$, $H \in (0, 1/2)$, $\forall t \in [0, T]$

existe, para toda constante $c > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$ uma estratégia $\theta^1(n) \in \mathbf{S}(\mathcal{F})$, onde $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\tilde{Y}}$ é definida como a σ -álgebra gerada pelo processo \tilde{Y} , tal que:

- (a) $\mathbb{P} \left[(\theta^1(n) \cdot \tilde{Y})_T = c \right] > 1 - \frac{1}{n}$
- (b) $\inf_{t \in [0, T]} (\theta^1(n) \cdot \tilde{Y})_t \geq -\frac{1}{n}$.

Em particular a estratégia $\theta(n) = (\theta^0(n), \theta^1(0)) \in \Theta_{af,adm}^{\mathbf{S}}(\mathcal{F})$ com $\theta_t^0(n) = (\theta^1(n) \cdot \tilde{Y})_t - \theta_t^1(n) \tilde{Y}_t$ forma um c -FLVR.

Corolário 2.49. *Nos quatro casos do Teorema 2.48 existe, para toda constante $c > 0$, uma c -arbitragem $\frac{1}{c}$ -admissível $\theta \in \Theta_{af,adm}^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F})$.*

Para a demonstração do Teorema 2.48 e seu Corolário precisaremos de três lemas, cujas demonstrações podem ser encontradas no final desta seção.

Lema 2.50. *Seja $Z = (Z_t)_{t \in [a,b]}$ um processo estocástico contínuo. Se*

$$\mathbb{P}[Z_a = Z_b] = 0$$

e, para todo $\varepsilon > 0$ existirem \mathcal{F}^Z -tempos de parada $a = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n = b$ tais que

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in [a,b]} \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge t})^2 \geq \varepsilon \right] < \varepsilon \quad (2.6)$$

então existirá, para todo $M > 0$, um $\beta \in \mathbf{S}(\mathcal{F}^Z)$ tal que:

- (i) $\mathbb{P}[(\beta \cdot Z)_b < M] < \frac{1}{M}$ e
- (ii) $\inf_{t \in [a,b]} (\beta \cdot Z)_t \geq -\frac{1}{M}$.

Lema 2.51. *Seja $Z = (Z_t)_{t \in [a,b]}$ um processo estocástico contínuo. Se, para todo $L > 0$ existirem \mathcal{F}^Z -tempos de parada $a = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n = b$ e*

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1}} - Z_{\tau_j})^2 < L \right] < \frac{1}{L}, \quad (2.7)$$

então existe, para todo $M > 0$, $\beta \in \mathbf{S}(\mathcal{F}^Z)$ tal que

- (i) $\mathbb{P}[(\beta \cdot Z)_b < M] < \frac{1}{M}$,
- (ii) $\inf_{t \in [a,b]} (\beta \cdot Z)_t \geq -\frac{1}{M}$,
- (iii) $|\beta| \leq \frac{1}{M}$, onde $|\beta| = \sup_{t \in [a,b]} |\beta_t|$.

Lema 2.52. *Seja $B^H = (B_t^H)_{t \in [0,T]}$ um mBf com índice de Hurst $H \in (0, 1)$ e $T, p, q > 0$. Então, quando $n \rightarrow +\infty$,*

- (i) $n^{pH-1-q} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{j+1}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p \rightarrow 0$ em L^1 ;
- (ii) $n^{pH-1+q} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{j+1}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p \rightarrow +\infty$ em probabilidade

Demonstração. (do Teorema 2.48) Pela auto-similaridade de B^H basta mostramos o resultado para $T = 1$.

- (i) $H \in (1/2, 1)$, $\tilde{Y}_t = \nu_t + \sigma B_t^H$, $t \in [0, 1]$.

Claramente temos que

$$\mathbb{P}[\tilde{Y}_0 = \tilde{Y}_1] = 0.$$

Como, por hipótese, $\nu \in C^1[0, 1]$ (em particular, é Lipschitz com constante aleatória c_ν) e os caminhos de B^H são Hölder contínuos (com constante c_{B^H}) de ordem α para todo $\alpha \in (1/2, H)$ temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \max_{t \in [0,1]} \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{Y}_{\frac{j+1}{n} \wedge t} - \tilde{Y}_{\frac{j}{n} \wedge t})^2 \\
&= \max_{t \in [0,1]} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\nu \left(\frac{j+1}{n} \wedge t \right) - \nu \left(\frac{j}{n} \wedge t \right) + \sigma \left(B_{\frac{j+1}{n} \wedge t}^H - B_{\frac{j}{n} \wedge t}^H \right) \right]^2 \\
&\leq \max_{t \in [0,1]} \sum_{j=0}^{n-1} \left[c_\nu \left(\frac{j+1}{n} \wedge t - \frac{j}{n} \wedge t \right) + \sigma c_{B^H} \left(\frac{j+1}{n} \wedge t - \frac{j}{n} \wedge t \right)^\alpha \right]^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[c_\nu \left(\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right) + \sigma c_{B^H} \left(\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right)^\alpha \right]^2 \\
&= c_\nu^2 \frac{1}{n} + 2c_\nu \sigma c_{B^H} \frac{1}{n^\alpha} + \sigma^2 c_{B^H}^2 \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \rightarrow 0, \text{ quase certamente, quando } n \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{t \in [0,1]} \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{Y}_{\frac{j+1}{n} \wedge t} - \tilde{Y}_{\frac{j}{n} \wedge t})^2 = 0 \right] = 1. \quad (2.8)$$

Decorre daí que $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0,1]}$ satisfaz à hipótese (2.6) e portanto, pelo Lema 2.50, temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\beta(n) \in \mathbf{S}(\mathcal{F}^{\tilde{Y}})$ tal que

- (a) $\mathbb{P} \left[(\beta(n) \cdot \tilde{Y})_1 < c \right] < \frac{1}{n}$
- (b) $\inf_{t \in [0,1]} (\beta(n) \cdot \tilde{Y})_t \geq -\frac{1}{n}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ vamos definir o seguinte $\mathcal{F}^{\tilde{Y}}$ -tempo de parada:

$$\xi_n = \inf \{ t : (\beta(n) \cdot \tilde{Y})_t \geq c \}.$$

Desta forma, para $\theta^1(n) = \beta(n) \mathbf{1}_{[0, \xi_n]} \in \mathbf{S}(\mathcal{F}^{\tilde{Y}})$ temos que

- (a) $\mathbb{P} \left[(\theta^1(n) \cdot \tilde{Y})_1 = c \right] > 1 - \frac{1}{n}$
- (b) $\inf_{t \in [0, T]} (\theta^1(n) \cdot \tilde{Y})_t \geq -\frac{1}{n}$.

(ii) $H \in (1/2, 1)$, $\tilde{Y}_t = \exp \{ \nu_t + \sigma B_t^H \}$, $t \in [0, 1]$.

Assim como em (i), claramente $\mathbb{P}[\tilde{Y}_1 = \tilde{Y}_0] = 0$ e é claro que a relação (2.8) continua válida. Desta forma $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0,1]}$ também satisfaz (2.6) e a demonstração torna-se totalmente análoga a (i).

(iii) $H \in (0, 1/2)$, $\tilde{Y}_t = \nu_t + \sigma B_t^H$, $t \in [0, 1]$.

Vamos provar que $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0,1]}$ satisfaz (2.7). Do Lema 2.52 item (i), caso escolhamos $p = 1$, $q = H$ temos que, quando $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{j+1}{n}}^H - B_{\frac{j}{n}}^H| \longrightarrow 0 \text{ em } L^1. \quad (2.9)$$

Além disto vale a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} 2 \left| \left(\nu \left(\frac{j+1}{n} \right) - \nu \left(\frac{j}{n} \right) \right) \left(\sigma B_{\frac{j+1}{n}}^H - \sigma B_{\frac{j}{n}}^H \right) \right| &\leq 2c_\nu \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \sigma \left(B_{\frac{j+1}{n}}^H - B_{\frac{j}{n}}^H \right) \right| \\ &\leq 2c_{nu} \sigma \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| B_{\frac{j+1}{n}}^H - B_{\frac{j}{n}}^H \right| \xrightarrow{L^1} 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

Em particular, para todo $L > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_1$ então, por Chebyshev, (2.9) e (2.10),

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} 2 \left| \left(\nu \left(\frac{j+1}{n} \right) - \nu \left(\frac{j}{n} \right) \right) \left(\sigma B_{\frac{j+1}{n}}^H - \sigma B_{\frac{j}{n}}^H \right) \right| > L \right] < \frac{1}{2L}.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.52, item (ii), podemos tomar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_2$ temos

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sigma B_{\frac{j+1}{n}}^H - \sigma B_{\frac{j}{n}}^H \right)^2 < 2L \right] < \frac{1}{2L},$$

de fato, basta tomarmos $p = 2$, $q = 1 - 2H$.

Vamos agora definir as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sigma B_{\frac{j+1}{n}}^H - \sigma B_{\frac{j}{n}}^H \right)^2; \\ S_2 &= 2 \left(\nu \left(\frac{j+1}{n} \right) - \nu \left(\frac{j}{n} \right) \right) \times \left(\sigma B_{\frac{j+1}{n}}^H - \sigma B_{\frac{j}{n}}^H \right). \end{aligned}$$

Note que

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\tilde{Y}_{\frac{j+1}{n}} - \tilde{Y}_{\frac{j}{n}} \right)^2 < L \right] \leq \mathbb{P}[S_1 + S_2 < L]$$

e valem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_1 + S_2 < L] &= \mathbb{P}[S_1 + S_2 < L, S_2 > -L] + \mathbb{P}[S_1 + S_2 < L, S_2 \leq -L] \\ &\leq \mathbb{P}[S_1 < L - S_2, -S_2 \leq L] + \mathbb{P}[S_2 \leq -L] \\ &\leq \mathbb{P}[S_1 \leq 2L, -S_2 \leq L] + \mathbb{P}[|S_2| \geq L] \\ &\leq \mathbb{P}[S_1 \leq 2L] + \mathbb{P}[|S_2| \geq L]. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ temos que

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\tilde{Y}_{\frac{j+1}{n}} - \tilde{Y}_{\frac{j}{n}} \right)^2 < L \right] \leq \frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} = \frac{1}{L}.$$

Assim, pelo Lema 2.51, existe para todo $n \in \mathbb{N}$ um $\beta(n) \in \mathbf{S}(\mathcal{F}^{\tilde{Y}})$ tal que

- (i) $\mathbb{P} \left[(\beta(n) \cdot \tilde{Y})_1 < c \right] < \frac{1}{n}$
- (ii) $\inf_{t \in [0,1]} (\beta(n) \cdot \tilde{Y})_t \geq -\frac{1}{n}$

Novamente podemos construir $\theta(n)$ como em (i) e temos o resultado desejado.

(iv) $H \in (0, 1/2)$, $\tilde{Y}_t = \exp \{ \nu_t + \sigma B_t^H \}$, $t \in [0, 1]$.

Como o processo $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0,1]}$ é contínuo e positivo, temos que $\min_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_t > 0$.

Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbb{P} \left[\inf_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_t \leq \varepsilon \right] < \frac{1}{2L}$$

para qualquer L fixado.

Do que provamos em (iii) podemos afirmar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} (\log \tilde{Y}_{\frac{j+1}{n}} - \log \tilde{Y}_{\frac{j}{n}})^2 < \frac{1}{\varepsilon^2} L \right] < \frac{1}{2L}.$$

Note que, pelo Teorema do Valor Médio, para algum $c \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |\log \tilde{Y}_{\frac{i+1}{n}} - \log \tilde{Y}_{\frac{i}{n}}| &\leq \left(\sup_{t \in [0,1]} Y_t^{-1} \right) |\tilde{Y}_{\frac{i+1}{n}} - \tilde{Y}_{\frac{i}{n}}| \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\inf_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_t \right) |\log \tilde{Y}_{\frac{i+1}{n}} - \log \tilde{Y}_{\frac{i}{n}}| &\leq |\tilde{Y}_{\frac{i+1}{n}} - \tilde{Y}_{\frac{i}{n}}|. \end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{Y}_{\frac{j+1}{n}} - \tilde{Y}_{\frac{j}{n}})^2 < L \right] &\leq \mathbb{P} \left[\min_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_t \leq \varepsilon, \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=0}^{n-1} (\log \tilde{Y}_{\frac{j+1}{n}} - \log \tilde{Y}_{\frac{j}{n}})^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} L \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[\min_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_t \leq \varepsilon \right] \\ &\quad + \mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{n-1} (\log \tilde{Y}_{\frac{j+1}{n}} - \log \tilde{Y}_{\frac{j}{n}})^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} L \right] < \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

Logo $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0,1]}$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.51 e, assim $\theta^1(n)$ pode ser construído como em (iii). \square

Demonstração. (do Corolário 2.49) Novamente, como B^H é auto-similar, basta provar o resultado para $T = 1$. Vamos então dividir o intervalo $(0, 1]$ nos subintervalos

$$I_n = (a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}$$

onde $a_n = 1 - 2^{1-n}$ e $b_n = 1 - 2^{-n}$.

Por \tilde{Y}^n vamos denotar a restrição de \tilde{Y} a I_n e definiremos $\mathcal{F}^{\tilde{Y}^n} = \left(\mathcal{F}_t^{\tilde{Y}^n} \right)_{t \in I_n}$.

Note que $\mathcal{F}_t^{\tilde{Y}^n} \subset \mathcal{F}_t^{\tilde{Y}} \forall n \in \mathbb{N}, t \in I_n$.

Pelo Teorema 2.48, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\beta(n) \in \mathbf{S}(\mathcal{F}^{\tilde{Y}^n})$ tal que

- (a) $\mathbb{P} \left[(\beta(n) \cdot \tilde{Y}^n)_{b_n} \geq c + \frac{1}{c} \right] \geq 1 - \frac{1}{n}$
- (b) $\inf_{t \in [0, T]} (\theta^1(n) \cdot \tilde{Y}^n)_t \geq -\frac{2^{-n}}{c}$.

Para

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta(n) \mathbb{1}_{I_n}, \\ \xi &= \inf \{ t \in [0, 1] : (\beta \cdot \tilde{Y})_t \geq c \} \end{aligned}$$

é um $\mathcal{F}^{\tilde{Y}}$ -tempo de parada. Segue, portanto, de (a) e (b) que $\mathbb{P}[\xi < 1] = 1$. Desta forma podemos definir $\theta^1 = \beta \mathbf{1}_{[0, \xi]} \in \mathbf{qS}(\mathcal{F}^{\tilde{Y}})$ e a estratégia auto-financiável $\theta = (\theta^0, \theta^1)$ com $\theta^0 = (\theta^1 \cdot \tilde{Y})_t - \theta_t^1 \tilde{Y}_t$ é uma c -arbitragem $\frac{1}{c}$ -admissível em $\Theta_{af, adm}^{\mathbf{qS}}(\mathcal{F}^{\tilde{Y}})$. \square

Seguimos agora para as demonstrações dos Lemas 2.50, 2.51 e 2.52

Demonstração. (do Lema 2.50) Seja $M > 0$. Como, por hipótese, $\mathbb{P}[Z_a = Z_b] = 0$, temos que

$$0 = \mathbb{P}[Z_a = Z_b] = \mathbb{P}[Z_a - Z_b = 0] = \mathbb{P}[(Z_a - Z_b)^2 = 0]$$

e, portanto, pela continuidade da medida de probabilidade, $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[(Z_a - Z_b)^2 < \varepsilon] < \frac{1}{2M}.$$

Além disto, por (2.6), existem $a = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n = b$, \mathcal{F}^Z -tempos de parada, tais que

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [a, b]} \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge t})^2 \geq \frac{\varepsilon}{M^2 + 1} \right] < \frac{1}{2M}. \quad (2.11)$$

Como Z é contínuo, podemos definir o seguinte \mathcal{F}^Z -tempo de parada:

$$\xi = b \wedge \inf \left\{ t \in [a, b] : \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge t})^2 \geq \frac{\varepsilon}{M^2 + 1} \right\}, \quad (2.12)$$

onde, como usual consideraremos que $\inf \emptyset = +\infty$.

Note que $\xi < b \Rightarrow \sup_{t \in [a, b]} \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge t})^2 \geq \frac{\varepsilon}{M^2 + 1}$ e, portanto, a equação 2.11 pode ser reescrita como

$$\mathbb{P}[\xi < b] < \frac{1}{2M}.$$

Vamos definir agora

$$\beta = \frac{2}{\varepsilon} \left(M + \frac{1}{M} \right) \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_j} - Z_a) \mathbf{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]} \mathbf{1}_{[a, \xi]}. \quad (2.13)$$

Note que $\beta \in \mathbf{S}(\mathcal{F})$, pois

$$\begin{aligned} g_0 &= 0; \\ g_j &= \frac{2}{\varepsilon} \left(M + \frac{1}{M} \right) (Z_{\tilde{\tau}_j} - Z_a), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\tau}_j = \tau_j \wedge \xi$ continua sendo uma seqüência de \mathcal{F}^Z -tempos de parada (ver, Proposição 2.15). Desta forma temos que

$$\begin{aligned}
(\beta \cdot Z)_t &= \sum_{j=0}^{n-1} 2 \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} (Z_{\tilde{\tau}_j} - Z_a)(Z_{\tilde{\tau}_{j+1} \wedge t} - Z_{\tilde{\tau}_j \wedge t}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} 2 \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} (Z_{\tau_j \wedge \xi} - Z_a)(Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}) \\
&= 2 \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[\sum_{j=0}^{n-1} Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}) \right. \\
&\quad \left. - Z_a \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}) \right] \\
&= 2 \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[\sum_{j=0}^{n-1} Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}) \right. \\
&\quad \left. - Z_a (Z_{\tau_n \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_0 \wedge \xi \wedge t}) \right],
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato que quando $\min \{(\tau_j \wedge \xi), t\} = t$ o segundo termo do somatório se anula. Assim, após alguma álgebra, encontramos

que

$$\begin{aligned}
(\beta \cdot Z)_t &= \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[(Z_{\xi \wedge t} - Z_a)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge t})^2 \right] \\
&= 2 \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[\sum_{j=0}^{n-1} Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}) - Z_a (Z_{\xi \wedge t} - Z_a) \right] \\
&= \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[2 \sum_{j=0}^{n-1} Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}) - 2Z_a Z_{\xi \wedge t} + 2Z_a^2 \right] \\
&= \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[2 \sum_{j=0}^{n-1} Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}) + (Z_a - Z_{\xi \wedge t})^2 + Z_a^2 - Z_{\xi \wedge t}^2 \right] \\
&= \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[2 \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t} Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}^2) + (Z_a - Z_{\xi \wedge t})^2 + Z_a^2 - Z_{\xi \wedge t}^2 \right] \\
&= \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[(Z_{\xi \wedge t} - Z_a)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t})^2 + Z_a^2 - Z_{\xi \wedge t}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t}^2 - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t}^2) \right] \\
&= \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[(Z_{\xi \wedge t} - Z_a)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge t})^2 + Z_a^2 - Z_{\xi \wedge t} \right. \\
&\quad \left. + (Z_{\tau_n \wedge \xi \wedge t}^2 - Z_{\tau_0 \wedge \xi \wedge t}^2) \right] \\
&= \frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[(Z_{\xi \wedge t} - Z_a)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge t})^2 \right].
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.12) podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
\inf_{t \in [a, b]} (\beta \cdot Z)_t &= \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{M^2 + 1}{\varepsilon} \frac{1}{M} \left[(Z_{\xi \wedge t} - Z_a)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t})^2 \right] \right\} \\
&\geq \inf_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{M^2 + 1}{\varepsilon} \frac{1}{M} (Z_{\xi \wedge t} - Z_a)^2 \right\} \\
&\quad + \inf_{t \in [a, b]} \left\{ -\frac{M^2 + 1}{\varepsilon} \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t})^2 \right\} \\
&> 0 - \frac{1}{M} = -\frac{1}{M},
\end{aligned}$$

uma vez que o ínfimo do primeiro termo é alcançado quando $t = a$, pois $(Z_{\xi \wedge t} - Z_a)^2 \geq 0$ e, como $\tau_j \wedge \xi \wedge t$ e $\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t$ são menores do que ξ temos que

$$\sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge t})^2 < \frac{\varepsilon}{M^2 + 1},$$

que não depende de t . Isso prova a parte (ii) do Lema. Provamos (i) com a seguinte sequência de desigualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(\beta \cdot Z)_b < M] &= \mathbb{P}\left[\frac{M + \frac{1}{M}}{\varepsilon} \left[(Z_{\xi \wedge b} - Z_a)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi \wedge b} - Z_{\tau_j \wedge \xi \wedge b})^2 \right] < M\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\left(1 + \frac{1}{M^2}\right) (Z_{\xi} - Z_a)^2 \leq \varepsilon\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[(Z_{\xi} - Z_a)^2 \leq \varepsilon\right] \\ &= \mathbb{P}\left[(Z_{\xi} - Z_a)^2 \leq \varepsilon, \xi < b\right] + \mathbb{P}\left[(Z_{\xi} - Z_a)^2 \leq \varepsilon, \xi = b\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[(Z_{\xi} - Z_a)^2 \leq \varepsilon, \xi > b\right] \\ &\leq \mathbb{P}[\xi < b] + \mathbb{P}\left[(Z_{\xi} - Z_a)^2 \leq \varepsilon\right] \\ &< \frac{1}{2M} + \frac{1}{2M} = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

□

Demonstração. (do Lema 2.51) Seja $M > 0$. Como o processo Z é contínuo,

$$\xi_N := \inf \{t \in [a, b] : |Z_t - Z_a| \geq N\} \quad (2.14)$$

é, para todo $N > 0$, um \mathcal{F}^Z -tempo de parada e

$$\{\xi_N \leq b\} \longrightarrow \emptyset \text{ quando } N \longrightarrow +\infty.$$

Portanto, existe $N \geq 2$ tal que

$$\mathbb{P}[\xi_N \leq b] < \frac{1}{2M}.$$

Por hipótese, existem \mathcal{F}^Z -tempos de parada $a = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n = b$ tais que

$$\mathbb{P}\left[\sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1}} - Z_{\tau_j})^2 < N^2(M^2 + 1)\right] < \frac{1}{2M}.$$

Seja agora

$$\beta_t := -\frac{2}{MN^2} \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_j} - Z_a) \mathbf{1}_{[0, \xi_N]}(t) \mathbf{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]}(t).$$

Analogamente ao Lema anterior, ver (2.13), temos que $\beta \in \mathbf{S}(\mathcal{F}^Z)$. Além disto, para $N \geq 2$ e $t \in (\tau_j, \tau_{j+1}]$,

$$\begin{aligned} |\beta(\omega, t)| &= \left| -\frac{2}{MN^2} \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_j}(\omega) - Z_a(\omega)) \mathbf{1}_{[0, \xi_N(\omega)]}(t) \mathbf{1}_{(\tau_j(\omega), \tau_{j+1}(\omega)]}(t) \right| \\ &= \left| -\frac{2}{MN^2} (Z_{\tau_j}(\omega) - Z_a(\omega)) \mathbf{1}_{[0, \xi_N(\omega)]}(t) \right| \\ &\leq \frac{1}{M} \frac{2}{N} \leq \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

Para todo $t \in [a, b]$ temos que

$$\begin{aligned} (\beta \cdot Z)_t &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{-2}{MN^2} \right) (Z_{\tau_j \wedge \xi_N} - Z_a) (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi_N \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi_N \wedge t}) \\ &= \left(\frac{1}{MN^2} \right) \left[-2 \sum_{j=0}^{n-1} Z_{\tau_j \wedge \xi_N \wedge t} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi_N \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi_N \wedge t}) \right. \\ &\quad \left. + 2Z_a (Z_{\tau_n \wedge \xi_N \wedge t} - Z_{\tau_0 \wedge \xi_N \wedge t}) \right] \\ &= \left(\frac{1}{MN^2} \right) \left[\sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi_N \wedge t} - Z_{\tau_j \wedge \xi_N \wedge t})^2 - (Z_{t \wedge \xi_N} - Z_a)^2 \right]. \end{aligned}$$

Para a última igualdade basta notarmos que $\tau_N \wedge \xi_N \wedge t = \xi_N \wedge t$ e que $\tau_0 \wedge \xi_N \wedge t = a$ e completarmos os quadrados.

Analogamente ao Lema anterior, desta vez usando (2.14) ao invés de (2.12), provamos (ii). A parte (i) segue de maneira direta. De fato, definindo o evento

$$C = \left[\left(\frac{1}{MN^2} \right) \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi_N \wedge b} - Z_{\tau_j \wedge \xi_N \wedge b})^2 - (Z_{b \wedge \xi_N} - Z_a)^2 \right\} < M \right],$$

temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[(\beta \cdot Z)_b < M\right] &= \mathbb{P}[C] \\
&= \mathbb{P}[C, \xi_N \leq b] + \mathbb{P}[C, \xi_N = +\infty] \\
&\leq \mathbb{P}[\xi_N \leq b] + \mathbb{P}[C, \xi_N = +\infty] \\
&= \mathbb{P}[\xi_N \leq b] + \mathbb{P}\left[\sum_{j=0}^{n-1} (Z_{\tau_{j+1} \wedge \xi_N \wedge b} - Z_{\tau_j \wedge \xi_N \wedge b})^2 < M^2 N^2, \xi_N = +\infty\right],
\end{aligned}$$

pois $(Z_{b \wedge \xi_N} - Z_a)^2 = 0$ quando $\xi_N = +\infty$. \square

Demonstração. (do Lema 2.52) Esta demonstração de (i) segue as mesmas idéias da prova de 2.36. Desta vez usaremos que a sequência

$$(B_{(j+1)T}^H - B_{jT}^H)_{j=0}^{+\infty}$$

é estacionária e, portanto, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{(j+1)T}^H - B_{jT}^H|^p \longrightarrow \mathbb{E}[|B_T^H|^p] \text{ em } L^1. \quad (2.15)$$

Da auto-similaridade do mBf temos que, para todo $n > 0$,

$$n^{pH-1} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{j+1}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p \stackrel{d}{=} n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{(j+1)T}^H - B_{jT}^H|^p.$$

Daí segue o resultado em (i).

Vamos agora provar (ii). Seja $L > 0$. De (2.15) e da auto-similaridade do mBf podemos garantir que

$$n^{pH-1} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{j+1}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p \longrightarrow \mathbb{E}[|B_T^H|^p] \text{ em probabilidade}$$

e, portanto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_1$,

$$\mathbb{P}\left[\left|n^{pH-1} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{j+1}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p - \mathbb{E}[|B_T^H|^p]\right| > \frac{1}{2} \mathbb{E}[|B_T^H|^p]\right] < \frac{1}{L}.$$

Assim, para $n > n_1$,

$$\mathbb{P}\left[n^{pH-1} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{j+1}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p < \frac{1}{2} \mathbb{E}[|B_T^H|^p]\right] < \frac{1}{L},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbb{P} \left[n^{pH-1+q} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{(j+1)}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p < n^q \frac{1}{2} \mathbb{E}[|B_T^H|^p] \right] < \frac{1}{L}.$$

Desta forma, provamos (ii), pois podemos garantir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P} \left[n^{pH-1+q} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{\frac{(j+1)}{n}T}^H - B_{\frac{j}{n}T}^H|^p < L \right] < \frac{1}{L},$$

para todo $n > n_0$. □

Capítulo 3

Exclusão de Arbitragem em Modelos Fracionários

Neste capítulo vamos apresentar algumas aplicações do movimento Browniano fracionário em Finanças. Esta frase, há alguns anos atrás soaria como uma heresia no mundo acadêmico, haja vista que o mBf não é um semimartingal se $H \neq 1/2$ e, portanto, sabe-se que existem possibilidades de arbitragem. Aqui serão expostas duas abordagens diferentes para a exclusão destas possibilidades de arbitragem: a primeira baseada na inclusão de um tempo mínimo de espera entre duas transações subsequentes e a outra baseada na inclusão de custos de transação proporcionais ao valor do ativo.

A intenção de se incluir o mBf em modelagens financeiras nasce da comprovação empírica de existência de dependência de longo prazo (ver Definição 2.39) em alguns produtos financeiros. Há pelo menos 40 anos os trabalhos de Benoit Mandelbrot, iniciados por Mandelbrot (1963), já apontavam indícios de dependência de longo prazo nos preços do algodão; em Greene e Fielitz (1977) os autores analisaram o comportamento de 200 títulos listados na Bolsa de Nova Iorque (NYSE) e encontraram, nos retornos, os mesmo indícios.

Mais recentemente tem havido um foco maior no estudo de dependência de longo prazo, principalmente, em taxas de juros e câmbio (ver, por exemplo, Souza et al. (2006), Ohashi (2009)).

Outro interessante subproduto da utilização do mBf em finanças é que

o parâmetro de Hurst pode ser usado como um índice de eficiência do mercado analisado: quanto mais distante de $1/2$ menos eficiente é o mercado em questão. Para discussões mais profundas acerca deste tema o leitor pode consultar [Da Silva et al. \(2007\)](#), [Cajueiro et al. \(2009\)](#), [Gursakal et al. \(2009\)](#) e diversos outros trabalhos econométricos.

Durante todo este trabalho estaremos considerando um mercado que consiste de dois ativos: uma “conta de banco”, representando um ativo sem risco e uma ação (ativo com risco) que não paga dividendos. Em nosso contexto toda atividade econômica ocorrerá em um intervalo de tempo finito $[0, T]$ com $T \in (0, +\infty)$. Permitiremos vendas descobertas (*short selling*), ou seja, um agente econômico que tomou emprestado de uma terceira parte certo ativo financeiro poderá vendê-lo. Outras duas hipóteses usuais são que as taxas de juros para se emprestar dinheiro e para tomar dinheiro emprestado são as mesmas e que é possível comprar e vender qualquer fração de um ativo. Assumiremos também que não há diferenças entre o preço de compra e o preço de venda dos ativos (o *bid-ask spread* é zero).

Note que há duas “hipóteses usuais” ausentes em nossa definição de mercado: a inexistência de custos de transação e a possibilidade de transações em qualquer instante $t \in [0, T]$.

Formalmente vamos assumir que existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (ver Seção 2.1.1) onde estão definidos dois processos estocásticos, $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ e $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$ representando, respectivamente, os ativos sem e com risco. Estaremos interessados em estudar o comportamento de dois modelos particulares:

- (i) $X_t = 1, Y_t = Y_0 + \nu(t)B_t^H, t \in [0, T]$ - Modelo de Bachelier fracionário;
- (ii) $X_t = \exp\{rt\}, Y_t = Y_0 \exp\{rt + \nu(t) + \sigma B_t^H\}, t \in [0, T]$ - Modelo de Black-Scholes fracionário,

onde $\nu \in C^1[0, T]$ e $Y_0, \sigma \in \mathbb{R}$ e $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$ é um mBf. Os nomes dos modelos fazem referências aos modelos originais, cuja fonte de incerteza é um movimento Browniano (ver [Bachelier \(1900\)](#) e [Black e Scholes \(1973\)](#)).

A primeira abordagem, baseada nos trabalhos de Patrick Cheridito (ver

[Cheridito \(2003\)](#) e [Cheridito \(2001\)](#)) faz uma restrição na classe de possíveis estratégias, sendo necessário um tempo mínimo (pré-determinado e tão pequeno quanto se queira) entre duas transações. A outra abordagem, devida a Paolo Guasoni (ver [Guasoni \(2006\)](#) e [Guasoni \(2002\)](#)) lança mão de custos de transação proporcionais ao valor do ativo e estes podem ser definidos tão baixos quanto o mercado real estiver admitindo.

3.1 Abordagem de Cheridito

Nesta seção apresentaremos a abordagem de [Cheridito \(2003\)](#) para exclusão de possibilidades de arbitragem nos modelos de Bachelier e Black-Scholes fracionários, com $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

3.1.1 Exclusão da Arbitragem

Como comentado anteriormente, uma das possibilidades de exclusão das estratégias de arbitragem passa por exigirmos um tempo mínimo de espera entre duas transações consecutivas. Esta restrição pode ser formalizada através da construção da seguinte classe de estratégias.

Definição 3.1. Seja $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ uma filtração e $h > 0$. Definimos então

$$\mathbf{S}^h(\mathcal{F}) = \left\{ g_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]} \text{ tal que } \forall j, \tau_{j+1} > \tau_j + h \right\}$$

e $\Theta_{af}^h(\mathcal{F}) = \{ \theta = (\theta^0, \theta^1) \in \Theta_{af}^S(\mathcal{F}) : \theta^0, \theta^1 \in \mathbf{S}^h(\mathcal{F}) \}$.

A classe de estratégias

$$\Pi_C(\mathcal{F}) = \bigcup_{h>0} \Theta_{af}^h(\mathcal{F})$$

é a chamada Classe de Cheridito.

Vamos agora apresentar uma demonstração de que os modelos de Black-Scholes e Bachelier fracionários são livres de arbitragem se as estratégias são restritas à Classe de Cheridito.

Lema 3.2. *Seja $B = (B_t)_{t \geq 0}$ um movimento Browniano e $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$. Seja $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ uma versão contínua (ver Definição 2.1 e a Observação 2.3) do processo $\left(\int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB_s \right)_{t \geq 0}$. Então, para todo $c > 0$ e todo h e T tais que $0 < h \leq T$ temos que*

$$\mathbb{P} \left[\inf_{t \in [h, T]} Z_t \geq c \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [h, T]} Z_t \leq -c \right] > 0.$$

Demonstração. Sejam $c \geq 0$ e $0 < h \leq T$. Obviamente $Z \stackrel{d}{=} (-Z)$ e, portanto,

$$\mathbb{P} \left[\inf_{t \in [h, T]} Z_t \geq c \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [h, T]} Z_t \leq -c \right].$$

Vamos denotar por μ_W a medida de Wiener em $(C[0, T], \mathcal{B})$, onde \mathcal{B} é a sigma-álgebra dos Borelianos de $C[0, T]$.

Pelo módulo de continuidade do mB (ver, p.e., Karatzas e Shreve (1991), p.114, Teorema 9.25, Cap. 2) temos que $\mu_W(\hat{\Omega}) = 1$, onde

$$\hat{\Omega} = \left\{ \omega \in C[0, T] : \omega(0) = 0 \text{ e } \forall t \in [0, T], \lim_{s \rightarrow t} \frac{\omega(t) - \omega(s)}{\sqrt{|t-s|} \log\left(\frac{1}{|t-s|}\right)} = 0 \right\}. \quad (3.1)$$

Vale notar que, para todo $\omega \in \hat{\Omega}$, $\int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s)$ pode ser definida, para todo $t \geq 0$, como uma integral de Riemann-Stieltjes contínua em t . De fato, pela regra de integração por parte para integrais de Riemann-Stieltjes

$$\int_0^x (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) = (H-1/2) \int_0^x \omega(s)(t-s)^{H-3/2} ds + (t-x)^{H-1/2} \omega(x). \quad (3.2)$$

Como $\lim_{x \nearrow t} (t-x)^{H-1/2} \omega(x) = 0$ temos que,

$$\int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) = (H-1/2) \int_0^t \omega(s)(t-s)^{H-3/2} ds$$

e o lado direito é claramente contínuo em t .

Vale, ainda, a seguinte igualdade:

$$\mathbb{P} \left[\inf_{t \in [h, T]} Z_t \geq c \right] = \mu_W \left[\omega \in \hat{\Omega} : \inf_{t \in [h, T]} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) \geq c \right].$$

Inicialmente, vamos assumir que $H \in (1/2, 1)$.

Vamos definir

$$m = \frac{H + 1/2}{h^{H+1/2}}(c + T^{H-1/2})$$

e

$$A_m = \left\{ \omega \in \hat{\Omega} : \sup_{t \in [h, T]} |\omega_m(t)| \leq 1 \right\},$$

onde $\omega_m(t) = \omega(t) - mt$.

Pelo Teorema de Girsanov (ver, por exemplo, Seção 8.6 de [Oksendal \(2007\)](#)) existe uma medida μ_m definida em $\hat{\Omega}$ equivalente a μ_W tal que, sob esta nova medida ω_m é um mB e é sabido que $\mu_m(A_m) > 0$ ([Karatzas e Shreve \(1991\)](#), p. 196). Assim, pela equivalência entre μ_W e μ_m temos que $\mu_W(A_m) > 0$.

Para todo $\omega \in \hat{\Omega}$ e $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) &= \int_0^t \omega(s)(H-1/2)(t-s)^{H-3/2} ds \\ (H-1/2) \int_0^t \omega_m(s)(t-s)^{H-3/2} ds &+ (H-1/2) \int_0^t ms(t-s)^{H-3/2} ds \\ (H-1/2) \int_0^t \omega_m(s)(t-s)^{H-3/2} ds &+ m \frac{t^{H+1/2}}{H+1/2}. \end{aligned}$$

Agora, para $\omega \in A_m$ temos, $\forall t \in [0, T]$ as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} (H-1/2) \int_0^t \omega_m(s)(t-s)^{H-3/2} ds &\geq -(H-1/2) \int_0^t (t-s)^{H-3/2} ds \\ &= -(H-1/2) \frac{1}{H-1/2} t^{H-1/2} \\ &\geq -T^{H-1/2}. \end{aligned}$$

As desigualdades seguem, respectivamente, do fato de que para $\omega \in \hat{\Omega}$ temos $\sup |\omega_m| \leq 1$ e que estamos supondo $H > 1/2$.

Devido a nossa escolha da constante m temos

$$\begin{aligned} m \frac{t^{H+1/2}}{H+1/2} &= \frac{H+1/2}{h^{H+1/2}}(c + T^{H-1/2}) \frac{t^{H+1/2}}{H+1/2} \\ &= \left(\frac{t}{h} \right)^{H+1/2} (c + T^{H-1/2}) \\ &\geq c + T^{H-1/2}, \quad \forall t > h. \end{aligned}$$

Portanto, quando $t > 0$

$$\int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) \geq -T^{H-1/2} + c + T^{H-1/2} = c$$

e

$$A_m \subset \left\{ \inf_{t \in [h, T]} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) \geq c \right\}.$$

Como $\mu_W(A_m) > 0$ o Lema está provado para $H \in (1/2, 1)$.

Tomemos agora $H \in (0, 1/2)$. Como todo $\omega \in \hat{\Omega}$ é Hölder contínuo de ordem α , $\forall \alpha < 1/2$ (ver Proposição 2.31), existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$\mu_W \left(\sup_{s, t \in [0, T]} \frac{|\omega(t) - \omega(s)|}{(t-s)^{1/2-H/2}} \leq \delta \right) = 1.$$

Seja agora $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $\delta_n \uparrow \delta$. Daí e pela distribuição do supremo do mB em $[0, T]$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &< \mu_W(\omega \in \hat{\Omega} : \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)| \leq 1/2) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_W(\omega \in \hat{\Omega} : \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)| \leq 1/2 \text{ e } \sup_{s, t \in [0, T]} \frac{|\omega(t) - \omega(s)|}{(t-s)^{1/2-H/2}} \leq \delta_n) \\ &= \mu_W(A(1/2, \delta)) \end{aligned}$$

onde $A(1/2, \delta)$ é o conjunto

$$\left\{ \omega \in \hat{\Omega} : \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)| \leq 1/2 \text{ e } \sup_{s, t \in [0, T]} \frac{|\omega(t) - \omega(s)|}{(t-s)^{1/2-H/2}} \leq \delta \right\}.$$

Para esta parte da demonstração vamos definir

$$m = \frac{H+1/2}{h^{H+1/2}} \left[c + (1/2-H) \frac{2\delta}{H} T^{2H} + \frac{1}{2} h^{H-1/2} \right].$$

Além disto, usando as definições anteriores,

$$A_m(1/2, \delta) = \{ \omega \in \hat{\Omega} : \omega_m \in A(1/2, \delta) \}.$$

Como ω_m é um mB sob μ_m temos que

$$\mu_m(A_m(1/2, \delta)) = \mu_W(A(1/2, \delta)) > 0$$

e da equivalência das duas medidas podemos concluir que

$$\mu_W(A_m(1/2, \delta)) > 0.$$

Para $\omega \in \hat{\Omega}$ e $t \in [h, T]$ e fazendo uso da linearidade e da integração por partes para integrais de Riemann-Stieltjes (ver equação (3.2)) podemos garantir que

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) = \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d[\omega(s) - \omega(t) + \omega(t)] \\ &= \left(\frac{1}{2} - H\right) \left[\int_0^t (\omega(t) - \omega(s))(t-s)^{H-3/2} ds - \int_0^t (t-s)^{H-3/2} \omega(t) ds \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^t (\omega(t) - \omega(s))(t-s)^{H-3/2} ds + \omega(t)t^{H-1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^t (\omega_m(t) - \omega_m(s) + m(t-s))(t-s)^{H-3/2} ds + (\omega_m(t) + mt)t^{H-1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^t (\omega_m(t) - \omega_m(s))(t-s)^{H-3/2} ds \\ &+ \left(\frac{1}{2} - H\right)m \int_0^t (t-s)^{H-1/2} ds + (\omega_m(t) + mt)t^{H-1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^t (\omega_m(t) - \omega_m(s))(t-s)^{H-3/2} ds \\ &+ \omega_m(t)t^{H-1/2} + m \frac{t^{H+1/2}}{H+1/2}. \end{aligned}$$

Para $\omega \in A_m(1/2, \delta)$ e $t \in [h, T]$ podemos fazer as seguintes estimativas para os três termos acima:

Termo I

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^t (\omega_m(t) - \omega_m(s))(t-s)^{H-3/2} ds \\ & \geq - \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^t \delta(t-s)^{H/2-1} ds \\ & \geq - \left(\frac{1}{2} - H\right) \delta \frac{2}{H} t^{H/2} \geq - \left(\frac{1}{2} - H\right) \delta \frac{2}{H} T^{H/2} \end{aligned}$$

Termo II

$$t^{H-1/2} \omega_m(t) \geq -h^{H-1/2} \frac{1}{2},$$

Termo III

$$\begin{aligned} m \frac{t^{H+1/2}}{H+1/2} &= \left(\frac{t}{h}\right)^{H+1/2} \left[c + \left(\frac{1}{2} - H\right) \frac{2\delta}{H} T^{H/2} + \frac{1}{2} h^{H-1/2} \right] \\ &\geq c + \left(\frac{1}{2} - H\right) \frac{2\delta}{H} T^{H/2} + \frac{1}{2} h^{H-1/2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\omega(s) \geq c$$

e o Lema está provado para $H \in (0, 1/2)$. \square

Agora será enunciado e demonstrado o principal resultado desta seção: a inexistência de possibilidades de arbitragem nos modelos de Bachelier e Black-Scholes fracionários para estratégias na Classe de Cheridito (quando há necessidade de um tempo mínimo de espera entre duas transações).

Teorema 3.3. *Sejam $T > 0$, $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$ um mBf com $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$, $\sigma > 0$, e $\nu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $\sup_{t \in [0, T]} |\nu(t)| < +\infty$. Considere os dois casos:*

(i) $\tilde{Y}_t = \nu(t) + \sigma B_t^H$, $t \in [0, T]$,

(ii) $\tilde{Y}_t = \exp \{ \nu(t) + \sigma B_t^H \}$, $t \in [0, T]$.

Se $\theta^1 = g_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j \mathbf{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]} \in \Pi_C(\mathcal{F}^{\tilde{Y}})$ e existe algum $j \in \{1, \dots, n-1\}$ com $\mathbb{P}[g_j \neq 0] > 0$, então no caso (i),

$$\mathbb{P} \left[(\theta^1 \cdot \tilde{Y})_T \leq -c \right] > 0, \quad \forall c \geq 0$$

e, em (ii),

$$\mathbb{P} \left[(\theta^1 \cdot \tilde{Y})_T < 0 \right] > 0.$$

Demonstração. Por simplicidade de notação vamos provar o Teorema para $\tilde{Y}_t = B_t^H$ e $\exp \{ B_t^H \}$.

Suponha inicialmente $\tilde{Y}_t = B_t^H$ e fixe $h > 0$. Tome agora

$$\theta^1 = g_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j \mathbf{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]} \in \mathbf{S}^h(\mathcal{F}^{B^H})$$

tal que exista $j \in \{1, \dots, n-1\}$ com $\mathbb{P}[g_j \neq 0] > 0$. Se definirmos

$$k = \max \{j \in \{1, \dots, n-1\} : \mathbb{P}[g_j \neq 0] > 0\},$$

então

$$(\theta^1 \cdot B^H)_T = \sum_{j=1}^k g_j (B_{\tau_{j+1}}^H - B_{\tau_j}^H), \text{ q.c.}$$

Seja $c \geq 0$. Desta forma podemos facilmente verificar que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^k g_j (B_{\tau_{j+1}}^H - B_{\tau_j}^H) \leq -c \right] \\ & \geq \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{k-1} g_j (B_{\tau_{j+1}}^H - B_{\tau_j}^H) + \sup_{t \in [h, T]} g_k (B_{\tau_k+t}^H - B_{\tau_k}^H) \leq -c \right]. \end{aligned}$$

Seja $\hat{\Omega}$ como em (3.1), \mathcal{B} a sigma-álgebra de Borel gerada por $\hat{\Omega}$ e μ_W a medida de Wiener. Denotaremos por \mathcal{B} a sigma-álgebra de Borel gerada por $\hat{\Omega}$ e \mathbb{P} a medida de Wiener.

Vale lembrar que podemos escrever o mBf B^H como a seguinte integral de Riemann-Stieltjes (ver Definição 2.28)

$$B_t^H(\omega) = \int_{-\infty}^t \left[(t-s)^{H-1/2} - \mathbb{1}_{\{s \leq 0\}} (-s)^{H-1/2} \right] d\omega(s), \quad \forall t \geq 0.$$

Vamos definir as seguintes filtrações:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\hat{\Omega}} &= (\mathcal{F}_t^{\hat{\Omega}})_{t \in [0, T]}, \\ \mathcal{F}^{B^H} &= (\mathcal{F}_t^{B^H})_{t \in [0, T]}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{\hat{\Omega}} &= \sigma \left(\{ \omega \in \hat{\Omega} : \omega(s) \leq a \} : -\infty < s \leq t, a \in \mathbb{R} \right), \\ \mathcal{F}_t^{B^H} &= \sigma \left(B_s^H : 0 \leq s \leq t \right). \end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{F}^{\hat{\Omega}} \supset \mathcal{F}^{B^H}$ e, portanto, os \mathcal{F}^{B^H} -tempos de parada τ_1, \dots, τ_k são também $\mathcal{F}^{\hat{\Omega}}$ -tempos de parada.

Vamos agora dividir cada função $\omega \in \hat{\Omega}$ no ponto $\tau_k(\omega)$. Assim,

$$\pi_1 \omega(s) = \omega(s) \mathbb{1}_{(-\infty, \tau_k(\omega)]}(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\pi_2\omega(s) = \omega(\tau(\omega)_k + s) - \omega(\tau_k(\omega)), \quad s \geq 0.$$

Vamos definir ainda

$$\Omega_1 = \{\pi_1(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \omega \in \hat{\Omega}\}$$

$$\Omega_2 = \{\pi_2(\omega) \in C([0, +\infty)) : \omega \in \hat{\Omega}\}$$

e suas σ -álgebras de Borel, respectivamente \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 .

Claramente o mapeamento

$$\pi_1 : (\hat{\Omega}, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega_1, \mathcal{B}_1)$$

é $\mathcal{F}_{\tau_k}^{\hat{\Omega}}$ -mensurável.

Por outro lado o Teorema I.32 de [Protter \(2004\)](#) nos garante que $(\pi_2\omega(s))_{s \geq 0}$ é um \mathbb{P} -mB independente de $\mathcal{F}_{\tau_k}^{\hat{\Omega}}$.

Podemos notar que, pela representação do mBf via integral de Riemann-Stieltjes (ver Definição 2.28 e notar que podemos colocar a constante k em cada g_j)

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1} g_j(B_{\tau_{j+1}}^H - B_{\tau_j}^H) + g_k(B_{\tau_k+t}^H - B_{\tau_k}^H) \right)(\omega) = U_t(\pi_1\omega, \pi_2\omega),$$

para $\omega \in \hat{\Omega}$, $t \in [h, T]$, $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$ e

$$U_t(\omega_1, \omega_2) = U^0(\omega_1) + g_k(\omega_1)(U_t^1(\omega_1) + U_t^2(\omega_2)),$$

$$U_t^0(\omega_1) = \left(\sum_{j=1}^{k-1} g_j(B_{\tau_{j+1}}^H - B_{\tau_j}^H) \right)(\omega_1),$$

$$U_t^1(\omega_1) = \int_{-\infty}^{\tau_k(\omega_1)} [(\tau_k(\omega_1) + t - s)^{H-1/2} - (\tau_k(\omega_1) - s)^{H-1/2}] d\omega_1(s),$$

$$U_t^2(\omega_2) = \int_0^t (t - s)^{H-1/2} d\omega_2(s) = \int_0^t (\tau_k + t - s)^{H-1/2} d\omega_2'(s), \quad \text{onde } \omega_2' \in \Omega_2$$

Note que, pela Propriedade Forte de Markov vale a seguinte igualdade (em distribuição):

$$\int_{\tau}^{\tau+t} (\tau + t - s)^{H-1/2} d\omega_1(s) = \int_0^t (t - s)^{H-1/2} d\omega_1(s).$$

Como $(U_t)_{t \in [h, T]}$ é um processo estocástico contínuo em $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ o conjunto

$$A = \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : \sup_{t \in [h, T]} U_t(\omega_1, \omega_2) \leq -c \right\}$$

é $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -mensurável. Portanto, para quase todo $\omega \in \hat{\Omega}$,

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A(\pi_1(\cdot), \pi_2(\cdot)) \mid \mathcal{F}_{\tau_k}^{\hat{\Omega}} \right] (\omega) = \phi(\pi_1 \omega),$$

onde

$$\begin{aligned} \phi : \Omega_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_1 &\mapsto \phi(\omega_1) = \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A(\omega_1, \pi_2(\cdot)) \right]. \end{aligned}$$

Como $U_t^1(\omega_1)$ é uma função contínua em t , então, $\forall \omega_1 \in \Omega_1$, $\sup_{t \in [h, T]} U_t^1(\omega_1) < +\infty$, $\forall \omega_1 \in \Omega_1$. Vale notar também que $(\pi_2 \omega(t))_{t \geq 0}$ é um \mathbb{P} -mB e, aplicando o Lema 3.2 para cada $\omega_1 \in \Omega_1$ fixo, temos

$$\begin{aligned} \phi(\omega_1) &= \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [h, T]} U_t(\omega_1, \pi_2(\cdot)) \leq -c \right] \\ &\geq \mathbb{P} \left[U^0(\omega_1) + \sup_{t \in [h, T]} g(\omega_1) U_t^1(\omega_1) + \sup_{t \in [h, T]} g(\omega_1) U_t^2(\omega_2) \leq -c \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [h, T]} g(\omega_1) U_t^2(\omega_2) \leq -c' \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [h, T]} U_t^2(\omega_2) \leq -c'' \right] > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{k-1} g_j (B_{\tau_{j+1}}^H - B_{\tau_j}^H) + g_{\tau_k} (B_{\tau_{k+1}}^H - B_{\tau_k}^H) \leq -c \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A(\pi_1, \pi_2) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A(\pi_1, \pi_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_k}^{\hat{\Omega}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\phi \circ \pi_1 \right] > 0, \end{aligned}$$

o que prova o Teorema para o caso $\tilde{Y}_t = B_t^H$.

Vamos agora considerar o caso $\tilde{Y}_t = e^{B_t^H}$. Vamos assumir que existe $h > 0$ e

$$\theta^1 = g_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j \mathbf{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]} \in \mathbf{S}^h(\mathcal{F}^{B^H})$$

tal que exista $j \in \{1, \dots, n-1\}$ com $\mathbb{P}[g_j \neq 0] > 0$ e supor, por absurdo, que $(\theta^1 \cdot \tilde{Y})_T \geq 0$ q.c.. Se definirmos

$$k = \min \left\{ l \in \{1, \dots, n-1\} : \mathbb{P}[g_l \neq 0] > 0 \text{ e } \sum_{j=1}^l g_j (e^{B_{\tau_{j+1}}^H} - e^{B_{\tau_j}^H}) \geq 0 \text{ q.c.} \right\},$$

então ou

$$\sum_{j=1}^{k-1} g_j (e^{B_{\tau_{j+1}}^H} - e^{B_{\tau_j}^H}) = 0, \text{ q.c.},$$

ou

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{k-1} g_j (e^{B_{\tau_{j+1}}^H} - e^{B_{\tau_j}^H}) < 0 \right] > 0,$$

pois, como k é o menor índice para o qual valem simultaneamente as duas propriedades, temos, para $l \leq k-1$, que ou

$$\mathbb{P}[g_j \neq 0] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}[g_j = 0] = 1 \text{ ou}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{k-1} g_j (e^{B_{\tau_{j+1}}^H} - e^{B_{\tau_j}^H}) \geq 0 \right] < 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{k-1} g_j (e^{B_{\tau_{j+1}}^H} - e^{B_{\tau_j}^H}) < 0 \right] > 0. \end{aligned}$$

Em ambos os casos $P[C] > 0$, onde

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} g_j (e^{B_{\tau_{j+1}}^H} - e^{B_{\tau_j}^H}) \leq 0 \right\}.$$

Analogamente a primeira parte do Teorema e usando o Lema 3.2:

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{k-1} g_j (e^{B_{\tau_{j+1}}^H} - e^{B_{\tau_j}^H}) + \sup_{t \in [h, T]} g_k (e^{B_{\tau_{k+1}}^H} - e^{B_{\tau_k}^H}) < 0 \mid \mathcal{F}_{\tau_k}^{\hat{\Omega}} \right] (\omega) > 0,$$

para quase todo $\omega \in \Omega$. Assim,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^k g_j (e^{B_{\tau_{j+1}^H}} - e^{B_{\tau_j^H}}) < 0 \right] \\ & \geq \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{k-1} g_j (e^{B_{\tau_{j+1}^H}} - e^{B_{\tau_j^H}}) + \sup_{t \in [h, T]} g_k (e^{B_{\tau_{k+1}^H}} - e^{B_{\tau_k^H}}) < 0 \right] > 0, \end{aligned}$$

o que cai em contradição com a escolha de k . Portanto,

$$\mathbb{P} \left[(\theta^1 \cdot e^{B^H})_T \geq 0 \right] < 1 \Rightarrow \mathbb{P} \left[(\theta^1 \cdot e^{B^H})_T < 0 \right] > 0.$$

□

3.2 Abordagem de Guasoni

Hipótese 1. Assumiremos que o processo $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t \in [0, T]}$ tem caminhos amostrais *càdlàg* (do francês, *continue à droite, limitée à gauche*, ou seja, contínuo a direita com limites à esquerda), é estritamente positivo (quase certamente), adaptado a \mathcal{F}_t e contínuo.

Na abordagem proposta por Paolo Guasoni em [Guasoni \(2006\)](#) é assumido que o mercado possui custos de transação proporcionais $k \in (0, 1)$. Ou seja, para toda transação de valor monetário $\tilde{Y}_t |\Delta \theta_t^1|$ é cobrada uma taxa de $k \tilde{Y}_t |\Delta \theta_t^1|$. Nesta seção utilizaremos estratégias mais gerais do que as estratégias quase simples da Definição 2.40. Vamos utilizar estratégias que sejam localmente de variação limitada. A razão disto é que, como estratégias θ^1 de variação infinita em algum intervalo de tempo levariam à ruína imediata do agente, é suficiente considerar somente estratégias que são localmente de variação limitada. Esse conceito é formalizado através da definição a seguir.

Definição 3.4 (Variação). Para uma função $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ a variação de f em $[0, t]$ é definida como sendo

$$V(f)_t = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n_P-1} |f(s_{i+1}) - f(s_i)|,$$

onde o supremo é tomado no conjunto

$$\mathcal{P} = \left\{ P = \{x_0, \dots, x_{n_P}\} : P \text{ é uma partição de } [0, t] \right\}$$

de todas as partições do intervalo $[0, t]$. Diremos que f é localmente de variação limitada se $V(f)_t < +\infty$ para todo $t \leq T$.

Dada esta definição enunciaremos agora um teorema bastante importante sobre a caracterização de funções de variação limitada.

Teorema 3.5. *(de Jordan) Uma função f é de variação limitada se, e somente se, pode ser escrita como $f = f_+ - f_-$, onde f_+ e f_- são funções não decrescentes.*

Analisar somente estratégias com variação limitada é bastante razoável do ponto de vista econômico, uma vez que inclui as estratégias da Definição 2.40, cujo sentido econômico é o de *buy-and-hold*.

Baseados no conceito de estratégias auto-financiáveis em mercados sem custos de transação (ver, em particular, a Proposição 2.44) iremos propor uma definição para o processo de evolução do valor de um portfólio com estratégia θ^1 de variação limitada, que será aproximada por estratégias quase simples.

Definição 3.6. O processo que rege o valor do portfólio com estratégia $\theta^1 = g_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{j=1}^{n-1} g_j \mathbb{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]}$ em $\mathbf{S}(\mathcal{F})$ é definido como sendo

$$\tilde{V}_t^\theta = \sum_{\tau_j < t} g_j (\tilde{Y}_{\tau_{j+1}} - \tilde{Y}_{\tau_j}) - k \sum_{\tau_j < t} \tilde{Y}_{\tau_j} |g_{j+1} - g_j| - k \tilde{Y}_t |g_t|. \quad (3.3)$$

Como podemos aproximar uma estratégia θ^1 de variação limitada por estratégias quase simples, o valor do portfólio passa a ser

$$\tilde{V}_t^\theta = (\theta^1 \cdot \tilde{Y})_t - k \int_{[0, t]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s - k \tilde{Y}_t |\theta_t^1|,$$

onde $D\theta^1$ é a derivada no sentido das distribuições de θ^1 e $|D\theta^1|$ a variação total desta medida. Denotaremos por $|D\theta^1|_t$ a medida $|D\theta^1|$ aplicada no conjunto $[0, t]$, ou seja, $|D\theta^1|_t = |D\theta^1|([0, t])$.

A definição anterior deve ser interpretada da seguinte maneira: o primeiro termo leva em conta os ganhos de capital, o segundo contabiliza os custos incorridos nas diversas transações e o terceiro representa os eventuais custos de liquidação do portfólio.

Lema 3.7. *Sejam $\tilde{Y}, \tilde{Y}^* : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ processos com trajetórias càdlàg tais que*

$$|\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^*| < k\tilde{Y}_t, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Se $\theta^1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua de variação limitada, então

$$\tilde{V}_t^\theta \leq (\theta^1 \cdot \tilde{Y}^*)_t = \int_{[0,t]} \theta_s^1 d\tilde{Y}_s^*, \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

e vale a igualdade se, e somente se, $\theta_s^1 = 0, \forall s \leq t$.

Demonstração. Temos que:

$$\tilde{V}_t^\theta = (\theta^1 \cdot \tilde{Y}^*)_t + (\theta^1 \cdot (\tilde{Y} - \tilde{Y}^*))_t - k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s - k\tilde{Y}_t|\theta_t^1|.$$

Denotando $\varepsilon_t = (\tilde{Y} - \tilde{Y}^*)_t$ e usando uma “integração por partes” para a integral de Riemann-Stieltjes temos que

$$(\theta^1 \cdot (\tilde{Y} - \tilde{Y}^*))_t = (\theta^1 \cdot \varepsilon)_t = \theta_t^1 \varepsilon_t - \int_{[0,t]} \varepsilon_s dD\theta_s^1,$$

pois, conforme mencionado na introdução da Seção 2.3.1, estamos convencio-
nando que $\theta_{0-}^1 = X_{0-} = 0$.

Da hipótese de trabalho temos

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^*| \leq k\tilde{Y}_t &\Leftrightarrow -k\tilde{Y}_t \leq \tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^* \leq k\tilde{Y}_t \\ &\Leftrightarrow -\theta^1 k\tilde{Y}_t \leq \theta^1(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^*) \leq \theta^1 k\tilde{Y}_t \\ &\Leftrightarrow \theta_t^1 \varepsilon_t \leq |\theta^1| k\tilde{Y}_t. \end{aligned}$$

Note que a igualdade $\theta_t^1 \varepsilon_t = |\theta^1| k\tilde{Y}_t$ vale somente se $\theta_t^1 \equiv 0$.

Novamente, da hipótese, temos que

$$\begin{aligned}
|\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^*| < k\tilde{Y}_t &\Rightarrow -k\tilde{Y}_t < \tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^* < k\tilde{Y}_t \\
&\Rightarrow -k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s dD\theta_s^1 < \int_{[0,t]} \varepsilon_s dD\theta_s^1 < k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s dD\theta_s^1 \\
&\Rightarrow -k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s < -k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s dD\theta_s^1 \\
&< k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s dD\theta_s^1 < k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s,
\end{aligned}$$

pois o processo \tilde{Y} é quase certamente positivo. Portanto, como o Teorema 3.5 nos garante que

$$\int_{[0,t]} \tilde{Y}_s dD\theta_s^1 = \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d(D\theta^1)_s + \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d(D\theta^1)_s$$

e, assim,

$$-k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s - \int_{[0,t]} \varepsilon_s dD\theta_s^1 < 0.$$

Podemos observar ainda que

$$-k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s - \int_{[0,t]} \varepsilon_s dD\theta_s^1 = 0 \Leftrightarrow \theta_t^1 \equiv 0.$$

Desta forma,

$$\theta_t^1 \varepsilon_t - |\theta_t^1| k\tilde{Y}_t \leq 0, \quad (3.4)$$

$$- \int_{[0,t]} \varepsilon_s dD\theta_s - \int_{[0,t]} k\tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s \leq 0. \quad (3.5)$$

Logo, somando as equações (3.4) e (3.5)

$$\begin{aligned}
&\theta_t^1 \varepsilon_t - \int_{[0,t]} \varepsilon_s dD\theta_s - |\theta_t^1| k\tilde{Y}_t - \int_{[0,t]} k\tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (\theta^1 \cdot (\tilde{Y} - \tilde{Y}^*))_t - |\theta_t^1| k\tilde{Y}_t - \int_{[0,t]} k\tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (\theta^1 \cdot (\tilde{Y} - \tilde{Y}^*))_t + (\theta^1 \cdot \tilde{Y}^*)_t - |\theta_t^1| k\tilde{Y}_t - \int_{[0,t]} k\tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s \leq (\theta^1 \cdot \tilde{Y}^*)_t \\
&\Leftrightarrow \tilde{V}_t^\theta \leq (\theta^1 \cdot \tilde{Y}^*)_t.
\end{aligned}$$

□

Observação 3.8. Sob as hipóteses do Lema 3.7 uma mesma estratégia θ gera um *payoff* menor quando aplicada ao processo \tilde{Y} em um mercado com custos de transação do que quando aplicada a \tilde{Y}^* sem custos de transação. Desta forma, toda condição de não-arbitragem aplicável a \tilde{Y}^* pode ser imediatamente estendida a \tilde{Y} .

Proposição 3.9. *Sejam $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico satisfazendo à Hipótese 1 e $k, T > 0$. Se para todo tempo de parada τ tal que $\mathbb{P}[\tau < T] > 0$ tivermos que*

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{\tilde{Y}_\tau}{\tilde{Y}_t} - 1 \right| < k, \tau < T \right] > 0,$$

então \tilde{Y} é livre de arbitragem com custos de transação k no intervalo $[0, T]$.

Antes de começarmos a demonstração da proposição acima vamos discutir um pouco a idéia da sua hipótese. Obviamente, para conseguirmos uma arbitragem no instante τ precisamos começar a negociar. Como estamos lidando com mercados com custos de transação, o custo incorrido nesta transação precisa ser recuperado em algum instante futuro. Caso o ativo não varie o suficiente o agente não terá a possibilidade de recuperar os custos iniciais. Portanto, se, em todo instante existir, uma possibilidade (mesmo que remota) de variações arbitrariamente pequenas no preço do ativo, então o risco associado à queda do preço do ativo não pode ser eliminado e torna-se impossível levar a cabo uma estratégia de arbitragem.

Demonstração. (da Proposição 3.9) Seja θ uma estratégia tal que $\tilde{V}_T^\theta \geq 0$ quase certamente. Para provarmos que \tilde{Y} é livre de arbitragem precisamos que $\tilde{V}_T^\theta = 0$ quase certamente. Vamos mostrar que $\theta^1 \equiv 0$ e, portanto, $\tilde{V}_T^\theta = 0$. Vamos definir um tempo de parada τ e um evento A como

$$\tau = T \wedge \inf \{t : \theta_t^1 \neq 0\} \text{ e}$$

$$A = \left\{ \sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{\tilde{Y}_\tau}{\tilde{Y}_t} - 1 \right| < k \right\}.$$

Por hipótese, temos que $\mathbb{P}[A] > 0$. Para aplicarmos o Lema 3.7, seja $\tilde{Y}_t^* = \tilde{Y}_{t \wedge \tau}$. Observe que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{\tilde{Y}_\tau}{\tilde{Y}_t} - 1 \right| < k &\Rightarrow \left| \frac{\tilde{Y}_\tau}{\tilde{Y}_t} - 1 \right| < k, \quad \forall t \in [\tau, T] \\ &\Rightarrow \left| \tilde{Y}_\tau - \tilde{Y}_t \right| < k|\tilde{Y}_t|, \quad \forall t \in [\tau, T]. \end{aligned}$$

logo, para todo $t > \tau$, $\tilde{Y}_t^* = \tilde{Y}_{t \wedge \tau} = \tilde{Y}_\tau$ e, portanto

$$\left| \tilde{Y}_t^* - \tilde{Y}_t \right| < k|\tilde{Y}_t|.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_T^\theta &= \int_{[0, T]} \theta_s^1 d\tilde{Y}_s - k \int_{[0, T]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s - k\tilde{Y}_t|\theta_t^1| \\ &\leq \int_{[0, T]} \theta_s^1 d\tilde{Y}_s^* \\ &= \int_{[0, \tau)} \theta_s^1 d\tilde{Y}_{\tau \wedge s} + \int_{[\tau, T]} \theta_s^1 d\tilde{Y}_{\tau \wedge s}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{V}_T^\theta \leq \int_{[0, \tau)} \theta_s^1 d\tilde{Y}_s + \int_{[\tau, T]} \theta_s^1 d\tilde{Y}_\tau = 0$$

e, pelo Lema 3.7 a igualdade $\tilde{V}_t^\theta = 0$ vale somente quando $\theta^1 \equiv 0$. Isto termina a demonstração, pois, por hipótese, $\tilde{V}_t^\theta \geq 0$.

Vale notar que $\int_{[0, \tau)} \theta_s^1 d\tilde{Y}_s = 0$ pela construção do nosso tempo de parada, pois antes de τ o processo que rege a estratégia é nulo. No caso de $\int_{[\tau, T]} \theta_s^1 d\tilde{Y}_\tau^*$ sabemos que essa integral vale zero por que estamos integrando com respeito a um processo estocástico constante, nesse caso $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$, com $Z_t = \tilde{Y}_\tau$, $\forall t \in [0, T]$. \square

A Proposição 3.9 nos motiva a crer que, para certos processos, não existirão possibilidades de arbitragem mesmo com custos de transação k arbitrariamente pequenos e sob um horizonte de tempo T arbitrariamente grande. Veremos que esse é o caso quando estamos trabalhando com processos definidos em Guasoni (2006) como *sticky* (que poderia ser traduzido como “grudento” ou “adesivo”, mas manteremos a palavra original).

Definição 3.10. (Processo *sticky*) Um processo estocástico progressivamente mensurável $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t \in [0, +\infty)}$ é dito ser *sticky* com respeito a filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ se, para todo ε , $T > 0$ e todo tempo de parada τ tal que $\mathbb{P}[\tau < T] > 0$ temos que

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [\tau, T]} |\tilde{Y}_\tau - \tilde{Y}_t| < \varepsilon, \tau < T \right] > 0.$$

Proposição 3.11. *Seja $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t \in [0, T]}$ um processo satisfazendo a Hipótese 1. Se $Z = (\log \tilde{Y}_t)_{t \in [0, T]}$ é sticky, então \tilde{Y} é livre de arbitragem com custos de transação proporcionais k no intervalo $[0, T]$, $\forall k, T > 0$.*

Demonstração. Como \tilde{Y} é càdlàg e adaptado ele é progressivamente mensurável, assim como Z .

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $g(x) = |e^x - 1|$, que é, claramente, uma função contínua em zero. Assim, para todo $k > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que $\forall T > 0$ temos

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{\tilde{Y}_\tau}{\tilde{Y}_t} - 1 \right| < k \right\} &= \left\{ \sup_{t \in [\tau, T]} \left| e^{Z_\tau - Z_t} - 1 \right| < k \right\} \\ &= \left\{ \sup_{t \in [\tau, T]} g(Z_\tau - Z_t) < k \right\} \\ &\supset \left\{ \sup_{t \in [\tau, T]} |Z_\tau - Z_t| < \gamma \right\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{P} \left[\left\{ \sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{\tilde{Y}_\tau}{\tilde{Y}_t} - 1 \right| < k \right\} \right] \geq \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [\tau, T]} |Z_\tau - Z_t| < \gamma \right] > 0$$

e aplicando a Proposição 3.9 temos o resultado desejado. \square

3.2.1 Processos contínuos com suporte completo

Nesta seção vamos provar a *stickiness* para a classe de processos caracterizados pela condição de ter como suporte todo o espaço de Wiener.

Durante o restante deste trabalho, denotaremos o espaço de Wiener por

$$\mathbb{W} = \{f \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) : f(0) = 0\},$$

seu traço no intervalo $[0, t]$ por

$$\mathbb{W} = \{f \in C([0, t], \mathbb{R}) : f(0) = 0\} \text{ e}$$

e a projeção canônica $\mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}_t$ por π_t .

Para funções em \mathbb{W}_t definimos a seguinte norma (da convergência uniforme):

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, t]\}.$$

Diremos ainda que uma sequência de funções contínuas $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ converge (uniformemente em intervalos compactos) para $f \in \mathbb{W}$ se

$$\|f_n|_K - f|_K\|_\infty \rightarrow 0$$

para todo K subconjunto compacto de $[0, +\infty)$ e $f|_K$ denota a restrição de f ao conjunto K .

Vale notar que \mathbb{W} (\mathbb{W}_t) é um espaço métrico completo e separável com respeito à topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos (respectivamente, convergência uniforme).

Definição 3.12. (Suporte de uma medida de probabilidade) O suporte de uma medida de probabilidade \mathbb{P} é definido como sendo o menor conjunto fechado de probabilidade um e será denotado por $\text{supp}(\mathbb{P})$.

Proposição 3.13. *Considere o processo canônico $\tilde{Y}_t(\omega) = \omega_t$ definido no espaço de probabilidade filtrado $(\mathbb{W}, \mathcal{B}(\mathbb{W}), \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$, onde $\{\mathcal{F}_t\}$ é a filtração natural aumentada. Se o suporte de \tilde{Y} é \mathbb{W} , então \tilde{Y} é sticky.*

A demonstração da Proposição 3.13 será por contradição. Se existisse um intervalo (estocástico) no qual oscilações muito pequenas do processo de preço fossem proibidas, então algumas trajetórias (exatamente aquelas que variam muito pouco dentro desse intervalo) seriam excluídas do suporte do processo e esse não seria suportado em todo o espaço de Wiener.

Antes de irmos adiante, necessitamos definir o conceito de ínfimo essencial de uma variável aleatória dada uma sigma-álgebra.

Definição 3.14. (Ínfimo Essencial) Seja ξ uma função \mathcal{F} -mensurável e \mathcal{G} uma sub- σ -álgebra de \mathcal{F} (ou seja, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ e \mathcal{G} é uma σ -álgebra). Denotaremos por $\text{ess inf}(\xi|\mathcal{G})$ a maior função \mathcal{G} -mensurável menor do que ξ . Formalmente:

$$\text{ess inf}(\xi|\mathcal{G}) = \text{ess sup} \{g : g \in \mathcal{G}, g \leq \xi, \text{q.c.}\},$$

onde o supremo essencial de uma família qualquer de variáveis aleatórias, \mathcal{X} , é a variável aleatória X^* satisfazendo:

- (i) $\forall X \in \mathcal{X}, X \leq X^*$ quase certamente, e
- (ii) Y é uma variável aleatória tal que $X \leq Y$ quase certamente $\forall X \in \mathcal{X} \Rightarrow X^* \leq Y$ quase certamente.

Observação 3.15. Vale notar que quando \mathcal{G} é trivial, ou seja, $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, as funções mensuráveis são as constantes e a definição de ínfimo essencial apresentada acima coincide com a usual:

$$\text{ess inf} \xi = \sup\{c : c \in \mathbb{R}, c \leq \xi \text{ q.c.}\}.$$

Para uma demonstração de existência e algumas propriedades básicas do supremo essencial o leitor é recomendado a ver o Apêndice A de [Karatzas e Shreve \(2001\)](#). Dada a existência, a unicidade decorre imediatamente da definição apresentada.

Precisamos ainda formalizar dois conceitos que serão necessários: o de semicontinuidade e o de uma família equicontínua de funções. Essas definições seguem abaixo.

Definição 3.16. (Semicontinuidade) Seja E um espaço topológico, $x_0 \in E$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Diremos que f é semicontínua superiormente (s.c.s.) em x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ existir uma vizinhança U de x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$, para todo $x \in U$. Essa definição é equivalente a exigirmos que

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Por sua vez, f será dita ser semicontínua inferiormente (s.c.i.) em x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ existir uma vizinhança U de x_0 tal que $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$, para todo $x \in U$, ou, equivalentemente

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Diremos que f é semicontínua superiormente (inferiormente) se ela é semicontínua superiormente (inferiormente) em todo ponto $x_0 \in E$.

Definição 3.17. (Equicontinuidade) Sejam X, Y dois espaços métricos e F uma família de funções de X em Y . Diremos que a família F é equicontínua em $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, para toda $f \in F$ e todo x tal que $d(x_0, x) < \delta$. A família F é dita equicontínua se ela é equicontínua em todo $x \in X$.

Apresentaremos agora um lema ligeiramente técnico.

Lema 3.18. *Sejam $(U, \mathcal{U}, \mathbb{P}_U)$ e $(V, \mathcal{V}, \mathbb{P}_V)$ espaços de probabilidade tais que U e V são espaços métricos completos e separáveis, \mathcal{U} e \mathcal{V} contêm suas respectivas sigma-álgebras dos Borelianos e \mathbb{P}_U e \mathbb{P}_V possuem suporte completo (ou seja, $\text{supp}(\mathbb{P}_U) = U$ e $\text{supp}(\mathbb{P}_V) = V$). Seja $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que a família de funções $(f(\cdot, v))_{v \in V}$ é equicontínua. Então temos que*

$$\text{ess inf}(f|\mathcal{U}) = \inf_{v \in V} f(\cdot, v), \quad \mathbb{P}_U\text{-q.c.} \quad (3.6)$$

e o lado direito é uma função contínua de U em \mathbb{R} .

Observação 3.19. No enunciado do lema acima estamos fazendo um ligeiro abuso de notação. A função definida no lado direito de (3.6) deve ser entendida como a identificação de \mathcal{U} com a sua imagem sobre a imersão de U em $U \times V$.

Demonstração. (do Lema 3.18)

Para facilitar a notação, vamos definir \hat{f} e \tilde{f} como, respectivamente, os lados esquerdo e direito de (3.6), ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{f} : U \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \hat{f}(u, v) = \text{ess inf}(f|\mathcal{U})(u, v) \\ \tilde{f} : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \tilde{f}(u) = \inf_{v \in V} f(u, v). \end{aligned}$$

Vale notar que a equação (3.6) deve ser entendida como $\hat{f}(u, v) = \tilde{f}(u)$.

Vamos mostrar que \tilde{f} (como função de u) é contínua, provando que ela é semicontínua superiormente e inferiormente. A semicontinuidade superior decorre do seguinte fato:

$$\tilde{f} \text{ é s.c.s.} \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}, \{u : \tilde{f}(u) < \alpha\} \text{ é aberto.}$$

Como $f(\cdot, v)$ é contínua, o conjunto $\{u \in U : f(u, v) \geq \alpha\}$ é fechado para todo $v \in V$, logo

$$\begin{aligned} \{u : \tilde{f}(u) < \alpha\} &= \{u : \inf_{v \in V} f(u, v) < \alpha\} \text{ é aberto} \\ \iff \{u : \inf_{v \in V} f(u, v) < \alpha\}^c &= \{u : \inf_{v \in V} f(u, v) \geq \alpha\} \\ &= \{u : f(u, v) \geq \alpha, \forall v \in V\} = \bigcap_{v \in V} \{u : f(u, v) \geq \alpha\} \text{ é fechado.} \end{aligned}$$

O último conjunto acima é, de fato, fechado, pois é a interseção de conjuntos fechados.

Vamos agora provar que \tilde{f} é s.c.i.. Fixe ε e seja $(u_n)_{n \geq 1} \subset U$ uma sequência convergente para $u \in U$ e $(v_n)_{n \geq 1} \subset V$ uma sequência tal que

$$f(u_n, v_n) < \tilde{f}(u_n) + \varepsilon.$$

Mas, temos que

$$\tilde{f}(u) = \inf_{v \in V} f(u, v) \leq f(u, v_n).$$

Como $u_n \rightarrow u$, pela equicontinuidade da família de funções $(f(\cdot, v))_{v \in V}$, temos que:

$$\forall u \in U, \exists n_0 > 0 \text{ tal que}$$

$$\sup_{v \in V} |f(u, v) - f(u_n, v)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e, em particular, $f(u, v_n) - f(u_n, v_n) < \varepsilon$.

Portanto, temos as seguintes desigualdades:

$$\tilde{f}(u) \leq f(u, v_n) \leq f(u_n, v_n) + \varepsilon \leq \tilde{f}(u_n) + 2\varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Como ε é arbitrário, $\tilde{f}(u) \leq \liminf_{u_n \rightarrow u} f(u_n)$ e provamos que f é s.c.i.. Assim, como já havíamos mostrado que f é s.c.s. concluímos que \tilde{f} é contínua.

Como \tilde{f} é contínua e \mathcal{U} -mensurável (ínfimo de funções mensuráveis) temos, por definição, que, $\hat{f} \geq \tilde{f}$. Para provarmos a outra desigualdade iremos apresentar uma sequência de funções $\phi_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{U} -mensuráveis que converge uniformemente para \tilde{f} e tal que $\phi_n \geq \hat{f}$ quase certamente. Como a sequência de funções definida por

$$f_n(u, v) = 2^{-n} (\lfloor 2^n f(u, v) \rfloor + 1),$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x , decresce uniformemente para f , podemos garantir que $\text{ess inf}(f_n | \mathcal{U}) \geq \text{ess inf}(f | \mathcal{U})$. O problema é que ainda não podemos garantir que $\text{ess inf}(f_n | \mathcal{U}) \geq \tilde{f}$.

Vamos definir, para todo $k \in \mathbb{Z}$, o conjunto

$$A_n(k) = \{(x, y) \in U \times V : f_n(x, y) = k2^{-n}\}$$

Desta forma,

$$f'_n(u, v) = \min \{k2^{-n} : k2^{-n} \geq f_n(u, v), A_n(k) \text{ contém um conjunto aberto não vazio}\}$$

continua sendo uma sequência que converge uniformemente para f (exceto, possivelmente, em um conjunto de probabilidade 0) mas que, além disso, é tal que todos os seus “níveis” contêm um conjunto aberto.

Como, por hipótese, o suporte da medida produto $\mathbb{P}_U \times \mathbb{P}_V$ é $U \times V$, todos os conjuntos abertos não vazios têm probabilidade positiva. Desta forma, definindo a sequência

$$\phi_n(u) = \inf_{v \in V} f'_n(u, v)$$

podemos concluir que

$$\phi_n(u) = \text{ess inf}(f'_n | \mathcal{U}).$$

Já que

$$\phi_n \geq \text{ess inf}(f_n | \mathcal{U}) \geq \text{ess inf}(f | \mathcal{U})$$

e ϕ_n decresce para \tilde{f} , obtemos o resultado desejado passando o limite na equação acima. \square

Demonstração. (da Proposição 3.13) Precisamos provar que, para todo $\varepsilon, T > 0$ e qualquer tempo de parada τ com $\mathbb{P}[\tau < T] > 0$ vale que

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [\tau, T]} |\tilde{Y}_\tau - \tilde{Y}_t| < \varepsilon, \tau < T \right] > 0.$$

Mostraremos o resultado em três passos.

Passo 1:

Seja S o seguinte mapeamento:

$$\begin{aligned} S : W_T &\rightarrow W_T \\ f &\mapsto S^f, \end{aligned}$$

onde $S_t^f = \sup_{s \in [t, T]} |f_s - f_t|$. Portanto temos que S mapeia processos adaptados em processos não-adaptados, uma vez que S_t^f depende de valores de f em tempos no intervalo $[t, T]$. Vale notar que a aplicação S é Lipschitz e, portanto, uniformemente contínua. De fato,

$$\begin{aligned} d_{W_T}(S^f, S^{\bar{f}}) &= \sup_{t \in [0, T]} |S_t^f - S_t^{\bar{f}}| \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \sup_{s \in [t, T]} |f_s - f_t| - \sup_{s \in [t, T]} |\bar{f}_s - \bar{f}_t| \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \sup_{s \in [t, T]} |f_s - f_t - (\bar{f}_s - \bar{f}_t)| \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \sup_{s \in [t, T]} |f_s - \bar{f}_s| + \sup_{s \in [t, T]} |\bar{f}_t - f_t| \right| \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \sup_{s \in [t, T]} |f_s - \bar{f}_s| + |\bar{f}_t - f_t| \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \sup_{s \in [t, T]} |f_s - \bar{f}_s| + \sup_{t \in [0, T]} |\bar{f}_t - f_t| \\ &= 2 \sup_{t \in [0, T]} |\bar{f}_t - f_t| = 2d_{W_T}(f, \bar{f}). \end{aligned}$$

Definimos então o maior processo positivo e adaptado que é quase certamente menor ou igual a $S^{\tilde{Y}}$:

$$\begin{aligned} Z_t &= \text{ess inf} (S^{\tilde{Y}} | \mathcal{F}_t) = \\ &= \text{ess sup} \{g : g \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-mensurável e } g \leq S^{\tilde{Y}} \text{ q.c.}\}. \end{aligned}$$

Lembrando que definimos π_t como a projeção canônica em \mathbb{W}_t , afirmamos que Z admite a seguinte modificação regular:

$$\bar{Z}_t(\omega) = \inf \{ S_t^{\tilde{Y}}(\bar{\omega}) : \tilde{Y}(\bar{\omega}) \in \mathbb{W}_T, \pi_t(\tilde{Y}(\bar{\omega})) = \pi_t(\tilde{Y}(\omega)), \text{ q.c.} \}.$$

Note que \mathbb{W}_T pode ser identificado com $\mathbb{W}_t \times \mathbb{W}_{T-t}$ através da seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} I : \mathbb{W}_T &\rightarrow \mathbb{W}_t \times \mathbb{W}_{T-t} \\ f &\mapsto I(f) = \left(\pi_t(f), \pi_{T-t}(f_{\cdot+t} - f_t) \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(\tilde{Y}(\omega, s)) = \left(\pi_t(\tilde{Y}(\omega)), \pi_{T-t}(\tilde{Y}_{s+t}(\omega) - \tilde{Y}_t(\omega)) \right).$$

Temos ainda que a σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{W}_t)$ está contida em \mathcal{F}_t .

Vamos agora aplicar o Lema 3.18. Seguindo sua notação,

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{W}_t, \quad V = \mathbb{W}_{T-t}, \quad \mathbb{P}_U = \pi_t^{-1} \mathbb{P}_{\tilde{Y}}, \quad \mathbb{P}_V = \pi_{T-t}^{-1} \mathbb{P}_{\tilde{Y}_{\cdot+t}}, \\ f : U \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \eta) &\mapsto f(\omega, \eta) = S_t^{\tilde{Y}(I^{-1}(\omega, \eta))} = S_t^{I^{-1}(\omega, \eta)}. \end{aligned}$$

Note que $I^{-1} : \mathbb{W}_t \times \mathbb{W}_{T-t} \rightarrow \mathbb{W}_T$ pega um processo “separado” e “colado” (de forma a preservar a continuidade) transformando-o em um elemento de \mathbb{W}_T . Observe que f é contínua e que a família $(f(\cdot, v))_{v \in V}$ é equicontínua e que como $\text{supp}(\mathbb{P}_{\tilde{Y}}) = \mathbb{W}_T$ então $\text{supp}(\mathbb{P}_U) = U$ e $\text{supp}(\mathbb{P}_V) = V$; o que satisfaz às hipóteses do Lema 3.18. Desta forma,

$$\begin{aligned} Z_t((\omega, \eta)) &= \inf \{ S_t^{\tilde{Y}(\xi)} : \xi \in \mathbb{W}_T, \pi_t(\xi) = \pi_t((\omega, \eta)) \text{ q.c.} \} \\ &= \inf \{ S_t^\xi : \xi \in \mathbb{W}_T, \pi_t(\xi) = \pi_t((\omega, \eta)) \text{ q.c.} \} \\ &= \inf \{ S_t^{I^{-1}(\omega^*, \eta^*)} : (\omega^*, \eta^*) \in \mathbb{W}_T, \\ &\quad \pi_t((\omega^*, \eta^*)) = \pi_t((\omega, \eta)) = \omega \text{ q.c.} \} \\ &= \inf_{\eta^* \in \mathbb{W}_{T-t}} f(\omega, \eta^*). \end{aligned}$$

Como resultado do Lema 3.18 o mapeamento $\bar{Z} : \mathbb{W}_t \rightarrow \mathbb{W}_t$ é contínuo e, portanto, \bar{Z} é um processo contínuo.

Passo 2:

Afirmamos que

$$\mathbb{P}[\bar{Z}_t = 0, \forall t \in [0, T]] = 1.$$

Para $\varepsilon > 0$ vamos considerar o tempo de parada $\sigma^\varepsilon = \inf \{t : \tilde{Z}_t > \varepsilon\}$, definido como $\sigma^\varepsilon = +\infty$ sob o evento $\{\sup_{t \in [0, T]} \tilde{Z}_t \leq \varepsilon\}$. Assim,

$$\mathbb{P}[\tilde{Z}_t = 0, \forall t \in [0, T]] = 1 \iff \sigma^\varepsilon = +\infty \text{ q.c. } \forall \varepsilon > 0.$$

Vamos provar o lado direito. Por contradição, suponhamos que, para algum $\varepsilon > 0$, temos $\mathbb{P}[\sigma^\varepsilon < T] > 0$. Pela definição do processo Z , $Z_T = \text{ess inf}(S_T^{\tilde{Y}} | \mathcal{F}_T) = \text{ess inf}(\sup_{s \in [T, T]} |\tilde{Y}_s - \tilde{Y}_T|) = 0$ quase certamente e, portanto, como \tilde{Z} é uma modificação de Z , temos que $\tilde{Z}_T = 0$ quase certamente também. Desta forma,

$$\mathbb{P}[\sigma^\varepsilon < T] = \mathbb{P}[\sigma^\varepsilon \leq T] - \mathbb{P}[\sigma^\varepsilon = T] > 0,$$

pois $\mathbb{P}[\sigma^\varepsilon = T] = 0$.

Portanto, existe $\eta \in \Omega$ (que pode ser identificado com a realização do processo $\tilde{Y}(\eta) \in \mathbb{W}_T$) tal que $k = \sigma^\varepsilon(\eta) < T$. O instante k é o primeiro tempo para o qual a trajetória $\tilde{Z}(\eta)$ é maior do que ε .

Pela continuidade de $S^{\tilde{Y}}$, em alguma vizinhança U de η temos que $S_k^{\tilde{Y}}(\omega) > \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $\omega \in U$. Segue, portanto, que o aberto

$$\{\omega \in \mathbb{W} : \pi_k(\omega) \in U, S_k^{\tilde{Y}} = S_k^{\tilde{Y}}(\pi_k(\omega)) < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

contém o processo η parado no tempo σ^ε e tem probabilidade nula, o que contradiz a hipótese de que o suporte de \tilde{Y} é \mathbb{W} , uma vez que o suporte de \tilde{Y} é o mesmo de η .

Passo 3:

Vamos agora provar que

$$\mathbb{P}[\tilde{Z}_t = 0, \forall t \in [0, T]] = 1 \Rightarrow \mathbb{P}[S_\tau^{\tilde{Y}} < \varepsilon, \tau < T] > 0,$$

ou, por contradição, que

$$\mathbb{P}[S_\tau^{\tilde{Y}} < \varepsilon, \tau < T] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}[\tilde{Z}_t = 0, \forall t \in [0, T]] < 1.$$

Suponha, por contradição, que $\exists \varepsilon, T > 0$ tais que

$$\mathbb{P}[S_\tau^{\tilde{Y}} < \varepsilon, \tau < T] = 0.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ fixo vamos definir

$$D = \{d = k2^{-n} : k \in \mathbb{N}, d \neq T\}$$

$$\tau' = \inf \{t > \tau : t \in D \text{ ou } |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_\tau| = \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

Na prática, o tempo de parada τ' é o primeiro instante após τ que é ou um múltiplo de 2^{-n} (excluindo T , se necessário), ou quando \tilde{Y} distancia-se de \tilde{Y}_τ por $\frac{\varepsilon}{2}$. Pela continuidade das trajetórias de \tilde{Y} , para algum n suficientemente grande temos que $\mathbb{P}[\tau' \in D] > 0$. Como, por construção, $\sup_{t \in [\tau, \tau']} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_\tau| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ no conjunto $\{\tau, T\}$, temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq S_\tau^{\tilde{Y}} = \sup_{t \in [\tau, T]} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_\tau| \\ &\leq \sup_{t \in [\tau, \tau']} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_\tau| + \sup_{t \in [\tau', T]} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_\tau| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sup_{t \in [\tau', T]} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_\tau| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sup_{t \in [\tau', T]} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_{\tau'}| + \sup_{t \in [\tau', T]} |\tilde{Y}_{\tau'} - \tilde{Y}_\tau| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sup_{t \in [\tau', T]} |\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_{\tau'}| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + S_{\tau'}^{\tilde{Y}} \end{aligned}$$

e, portanto, $S_{\tau'}^{\tilde{Y}} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ no conjunto $\{\tau < T\}$.

Finalmente, chegamos a uma contradição ao notarmos que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{P}\left[S_{\tau'}^{\tilde{Y}} < \frac{\varepsilon}{2}, \tau < T\right] \geq \mathbb{P}\left[S_{\tau'}^{\tilde{Y}} < \frac{\varepsilon}{2}, \tau' \in D\right] \\
&= \sum_{s \in D} \mathbb{P}\left[S_{\tau'}^{\tilde{Y}} < \frac{\varepsilon}{2}, \tau = s\right] \\
&= \sum_{s \in D} \mathbb{P}\left[S_s^{\tilde{Y}} < \frac{\varepsilon}{2}, \tau = s\right] \\
&\geq \sum_{s \in D} \mathbb{P}\left[\tilde{Z}_s = 0, \tau' = s\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\tau' \in D\right] > 0,
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração. \square

3.2.2 Exclusão da Arbitragem

Nesta seção vamos aplicar o resultado obtido na Proposição 3.13 para provarmos que o modelo de Black-Scholes fracionário é livre de arbitragem quando introduzimos custos de transação proporcionais arbitrariamente pequenos.

Teorema 3.20. *Seja $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico tal que $Z_t = \nu_t + \sigma B_t^H$ com $\sigma > 0$ e $\nu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Então Z é sticky e, conseqüentemente, para todo $k, T > 0$ o processo $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t \in [0, T]}$ com $\tilde{Y}_t = e^{Z_t} = e^{\nu_t + \sigma B_t^H}$ é livre de arbitragem com custos de transação k no intervalo $[0, T]$.*

A idéia da demonstração do Teorema 3.20 será usar o Teorema 3 de Kallianpur (1971), que nos garante que o suporte de um processo Gaussiano com função de covariâncias $\Gamma(s, t)$ contínua é igual ao fecho (sob a norma da convergência uniforme) do *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS) correspondente. De um modo bem geral apresentamos abaixo a definição de um RKHS, que pode ser encontrada em Marcus e Rosen (2006), Teorema 5.3.1.

Teorema 3.21. *Sejam (T, d) um espaço métrico separável e $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de covariâncias real. Então existe um espaço de Hilbert separável, $\mathcal{H}(\Gamma)$, de funções contínuas $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

(i) $\Gamma(t, \cdot) \in \mathcal{H}(\Gamma)$,

(ii) $(f(\cdot), \Gamma(t, \cdot)) = f(t)$,

onde (\cdot, \cdot) denota o produto escalar do espaço $\mathcal{H}(\Gamma)$.

Definição 3.22. (*Reproducing Kernel Hilbert Space*) Dada uma função de covariâncias real $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ seu *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS) é definido como sendo o espaço de Hilbert $\mathcal{H}(\Gamma)$ do Teorema 3.21.

Demonstração. (do Teorema 3.21) Seja

$$S = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \Gamma(t_j, \cdot), a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1 \right\}.$$

Em S definimos a seguinte forma bilinear

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j \Gamma(t_j, \cdot), \sum_{k=1}^m b_k \Gamma(t_k, \cdot) \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k \Gamma(t_j, t_k). \quad (3.7)$$

Claramente, se $f(t) = \sum_{j=1}^n a_j \Gamma(t_j, t)$ então

$$f(t) = \left(f(\cdot), \Gamma(t, \cdot) \right). \quad (3.8)$$

Se $f \in S$, então $(f, f) \geq 0$, uma vez que Γ é uma função de covariâncias e, portanto, positiva definida. Note que, por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &= \left| \sum_{j=1}^n a_j \Gamma(t_j, t) \right|^2 = \\ &= \left| \sum_{j=1}^n a_j \Gamma(t_j, t_j)^{1/2} \frac{\Gamma(t_j, t)}{\Gamma(t_j, t_j)^{1/2}} \right|^2 \leq \\ &\leq \left| \left(\sum_{j=1}^n a_j \Gamma(t_j, t_j) \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\Gamma(t_j, t)}{\Gamma(t_j, t_j)^{1/2}} \right) \right| = \\ &= (f, f) \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(t_j, t)^2}{\Gamma(t_j, t_j)} \leq \\ &= (f, f) \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(t_j, t_j) \Gamma(t, t)}{\Gamma(t_j, t_j)} = \\ &= (f, f) \sum_{j=1}^n \Gamma(t, t) = \\ &= n(f, f) \Gamma(t, t) \end{aligned}$$

e, portanto, $(f, f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. Além disto, (\cdot, \cdot) é claramente bilinear e simétrica. Assim provamos que a relação definida em (3.7) define um produto interno em S .

Definimos a norma de uma função $f \in S$ como $\|f\|^2 := (f, f)$ e, desta forma, por (3.7) $\|\Gamma(t, \cdot)\|^2 = \Gamma(t, t)$.

Seja agora $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções em S . Então

$$|f_n(t) - f_m(t)|^2 = |(f_n(\cdot) - f_m(\cdot), \Gamma(t, \cdot))|^2 \leq \|f_n - f_m\|^2 \Gamma(t, t). \quad (3.9)$$

A relação (3.9) nos diz que se a sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$ é de Cauchy com respeito à norma induzida pelo produto interno então ela também é pontualmente de Cauchy em (T, d) . Fechamos o conjunto S com respeito à norma induzida pelo produto interno e identificamos os limites que ainda não estavam em S com seus limites pontuais em T . Definindo $\mathcal{H}(\Gamma)$ como esse fecho de S podemos concluir que $\mathcal{H}(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert de funções reais.

Como, por hipótese, (T, d) é separável, podemos tomar $\{t_n\}_{n \geq 1}$ como um subconjunto denso deste espaço. Aliado a isto e como a função de covariâncias Γ é contínua, o conjunto

$$S_1 = \left\{ \sum_{j=1}^k a_j \Gamma(s_j, \cdot), a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}, s_1, \dots, s_k \in \{t_n\}_{n \geq 1}, k \geq 1 \right\}$$

é denso em $\mathcal{H}(\Gamma)$ e, deste modo, a propriedade (3.8) estende-se imediatamente a $\mathcal{H}(\Gamma)$. Além disto,

$$|f(s) - f(t)| = |(f(\cdot), \Gamma(s, \cdot) - \Gamma(t, \cdot))| \leq \|f\| \|\Gamma(s, \cdot) - \Gamma(t, \cdot)\| \rightarrow 0,$$

quando $d(s, t) \rightarrow 0$, pois Γ é contínua. \square

Apesar de sua generalidade a definição acima não é funcional, uma vez que é praticamente impossível dizer se uma função pertence ou não ao RKHS \mathcal{H} . Felizmente, pode-se mostrar que, para o movimento Browniano usual em $[0, T]$ o espaço \mathcal{H} é simplesmente o espaço das funções absolutamente contínuas, que valem zero em zero e cuja derivada pertence a $L^2([0, T])$. No caso do movimento Browniano fracionário temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado no artigo “*Stochastic Integration with Respect to Fractional Brownian Motion*” em [Doukhan et al. \(2003\)](#).

Teorema 3.23. Para qualquer $H \in (0, 1)$, \mathcal{H} é o conjunto de funções f que podem ser escritas como

$$f(t) = \int_0^t K_H(t, s) \tilde{f}(s) ds,$$

com $\tilde{f} \in L^2([0, T])$ e K_H é uma função que satisfaz a seguinte relação:

$$\int_0^{t \wedge r} K_H(t, s) K_H(r, s) ds = \Gamma_H(t, r).$$

Por definição $\|f\|_{\mathcal{H}} = \|\tilde{f}\|_{L^2([0, T])}$.

Demonstração. (do Teorema 3.20) Para provarmos que o processo Z é *sticky* basta provarmos que o suporte do mBf em $[0, T]$ é W_T e o resultado seguirá pela Proposição 3.13.

Para referências futuras, note que vale a seguinte relação:

$$\int_0^t s^{a-1} (t-s)^{b-1} ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} t^{a+b-1}. \quad (3.10)$$

Note que a função Γ utilizada acima não é uma função de covariâncias como anteriormente, e sim a função Gama usual.

Seja, f um elemento genérico de \mathcal{H} . Pelo Teorema 3.23 podemos reescrevê-lo como

$$f(t) = \int_0^t K_H(t, s) \tilde{f}(s) ds,$$

para alguma $\tilde{f} \in L^2([0, T])$.

Para esta demonstração vamos fixar $\tilde{f}(s) = s^\alpha$, para algum α e K_H como o operador em $L^2([0, T])$ dado em [Decreusefond e Üstünel \(1999\)](#). Neste trabalho o operador K_H é definido de forma que,

$$f(t) = (K_H \tilde{f})(t) = \int_0^t K_H(t, s) \tilde{f}(s) ds = \left(I_{0+}^{2H} g_1 \right)(t),$$

onde

$$\begin{aligned} g_1(t) &= t^{1/2-H} \left(I_{0+}^{1/2-H} g_2 \right)(t), \\ g_2(t) &= t^{H-1/2} \tilde{f}(t) \quad \text{e,} \end{aligned}$$

$I_{a^+}^\alpha$ é a integral fracionária de Liouville definida em [Samko et al. \(1993\)](#) como:

$$\left(I_{a^+}^\alpha \tilde{f}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tilde{f}(s)(t-s)^{\alpha-1} ds.$$

Como $\tilde{f}(t) = t^\alpha$, temos que $g_2(t) = t^{\alpha-1/2+H}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} g_1(t) &= t^{1/2-H} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2-H)} \int_0^t s^{\alpha-1/2+H} (t-s)^{-1/2-H} ds \right] \\ &= t^{1/2-H} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2-H)} \frac{\Gamma(\alpha+1/2+H)\Gamma(1/2-H)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1/2+H)}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha+1/2-H}. \end{aligned}$$

Note que na segunda linha usamos a identidade enunciada em [\(3.10\)](#).

Desta forma,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(2H)} \int_0^t \frac{\Gamma(\alpha+1/2+H)}{\Gamma(\alpha+1)} s^{\alpha+1/2-H} (t-s)^{2H-1} ds = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1/2+H)\Gamma(\alpha+3/2-H)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3/2+H)} t^{\alpha+1/2+H}. \end{aligned}$$

Como $\tilde{f} \in L^2([0, T])$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ tomamos $\alpha > -1/2$ e assim o RKHS do mBf contém a álgebra de todos os polinômios com ordem maior ou igual a zero. Portanto, pelo Teorema de Stone-Weierstrass (ver, por exemplo [Rudin \(2006\)](#)) o RKHS do mBf é denso em W_T . Desta forma, podemos aplicar o Teorema 3 de [Kallianpur \(1971\)](#), que nos garante que o suporte de um processo Gaussiano com função de covariâncias $\Gamma(s, t)$ contínua é igual ao fecho (sob a norma da convergência uniforme) do RKHS correspondente, e concluir que o suporte de B^H é exatamente W_T . \square

3.2.3 Comentários

No *working paper* [Irle e Prelle \(2008\)](#) os autores trabalham com um conceito ligeiramente mais fraco de arbitragem, uma vez que a definição do valor do portfólio não leva em conta os custos de liquidação apresentados em [Guasoni \(2006\)](#), ver equação [3.3](#). Formalmente é assumido que

$$\tilde{V}_t^\theta = (\theta^1 \cdot \tilde{Y})_t - k \int_{[0,t]} \tilde{Y}_s d|D\theta^1|_s.$$

Mesmo com essa noção mais fraca de arbitragem os resultados apresentados em [Guasoni \(2006\)](#) (Proposição 3.13 deste trabalho) continuam válidos. A demonstração segue as mesmas linhas apresentadas aqui e pode ser encontrada no *working paper*.

Capítulo 4

Estimadores de Dependência de Longo Prazo

Neste capítulo apresentaremos, brevemente, alguns estimadores de dependência de longo prazo, visando fornecer métodos de avaliação da memória de longo prazo em séries temporais que justifiquem a utilização de modelos fracionários como os apresentados neste texto. A apresentação dada aqui será baseada no artigo [Taquq et al. \(1995\)](#). Vale observar que estes métodos servem apenas para estimativas preliminares, para estimadores mais robustos e/ou mais detalhes acerca dos métodos apresentados aqui o leitor pode consultar [Beran \(1994\)](#). Para uma recente comparação entre os diversos métodos apresentados neste capítulo o leitor pode consultar [Rea et al. \(2009\)](#).

Durante toda esta seção denotaremos por $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de rBf, como definido em [2.37](#).

4.1 Variância Agregada

Este método consiste em

- (1) dividir a série original, $Y = Y(1), \dots, Y(N)$, em N/m blocos de tamanho m e considerar a média em cada bloco:

$$Y^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} Y(i), \quad k = 1, \dots, N; \quad (4.1)$$

(2) tomar a variância amostral entre os blocos

$$\widehat{Var}[Y^{(m)}] = \frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} Y^{(m)}(k)^2 - \left(\frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} Y^{(m)}(k) \right)^2; \quad (4.2)$$

(3) repetir esse procedimento para diferentes valores de m , equidistantes em uma escala logarítmica, ou seja, $m_{i+1}/m_i = C$;

(4) efetuar uma regressão entre o logarítmo da variância amostral entre os blocos e o logarítmo dos diferentes valores de m .

A variância amostral deve se comportar como $\sigma^2 H(2H - 1)m^{2H-2}$ quando $m \rightarrow +\infty$ (ver Proposição 2.38, item (vi)). Portanto,

$$\log \left(\widehat{Var}[Y^{(m)}] \right) \sim \log \left(\sigma^2 H(2H - 1) \right) + (2H - 2) \log m$$

e H pode ser estimado através do coeficiente angular da regressão.

4.2 Valores Absolutos da Série Agregada

A idéia deste método é similar à do método da variância agregada (ver Seção 4.1), mas desta vez a estatística utilizada é

$$\frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} \left| Y^{(m)}(k) \right|, \quad (4.3)$$

utilizando a mesma notação de (4.1).

Como $(Y(k))_k$ é uma sequência de ruídos Brownianos fracionários, então

$$Y^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} Y(i) = \frac{1}{m} \left(B^H(km + 1) - B^H((k-1)m + 1) \right)$$

é uma sequência de variáveis aleatórias normais, tal que

$$\begin{aligned} Var[Y^{(m)}(k)] &= \frac{1}{m^2} \mathbb{E} \left[\left(B^H(km + 1) - B^H((k-1)m + 1) \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{m^2} \frac{\sigma^2}{2} m^{2H} = \frac{\sigma^2}{2} m^{2H-2}. \end{aligned}$$

Portanto, se $Z \sim N(0, 1)$, então

$$\mathbb{E}[|Y^{(m)}(k)|] = \mathbb{E}[\sqrt{\text{Var}[Y^{(m)}(k)]|Z|}] = C_\sigma m^{H-1},$$

onde m_σ é uma constante que depende de σ .

Como a sequência $(|Y^{(m)}(k)|)_k$ é estacionária, pelo Teorema Ergódico (ver, [Breiman \(1969\)](#), Capítulo 6) a sequência definida em (4.3) converge para $\mathbb{E}[|Y^{(m)}(1)|] = C_\sigma m^{H-1}$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Novamente podemos ajustar uma regressão entre a estatística definida em 4.3 e m (em escala logarítmica) cujo coeficiente angular deve ser $H - 1$.

4.3 Estatística R/S

Conforme comentado na Seção 2.2.1 aqui vamos apresentar a estatística R/S desenvolvida por Harold Hurst na década de 1950 (ver, [Hurst \(1951\)](#)).

Desde tempos imemoriais o rio Nilo é conhecido por suas características de dependência de longo prazo: longos períodos de seca são seguidos de longos períodos de enchentes. Estes últimos sempre foram de suma importância para a população egípcia, uma vez que as cheias aumentavam enormemente o rendimento agrícola da região, pois tinham um poder fertilizante no solo. Mesmo que de forma especulativa, podemos encontrar referências desse fenômeno inclusive na Bíblia:

E eis que vêm sete anos, e haverá grande fartura em toda a terra do Egito;

E depois deles levantar-se-ão sete anos de fome, e toda aquela fartura será esquecida na terra do Egito, e a fome consumirá a terra.

Gênesis 41:29-30

Devido a essa passagem bíblica Benoit Mandelbrot chamou este efeito de *Joseph effect*, ou efeito José (ver, [Mandelbrot \(1979\)](#)).

O que se conhece, de fato, de dados relativos ao rio Nilo datam do ano de 622 d.C.. A Figura 4.1 apresenta a variação do nível mínimo de água do rio

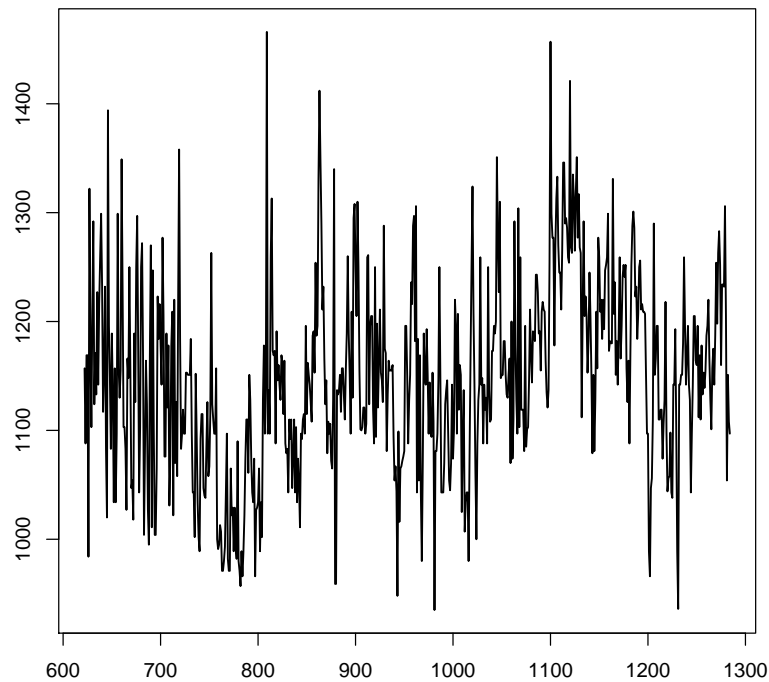


Figura 4.1: Nível mínimo do rio Nilo entre 622 e 1281

Nilo entre os anos de 622 e 1281, com medições feitas na estação da Ilha de Roda (Rawdah), ao sul do Cairo (ver, [Tousson \(1925\)](#)).

Os estudos do hidrólogo H. E. Hurst relativos ao nível do rio Nilo iniciaram-se quando este foi confrontado com o problema de regularizar sua vazão. Sua descoberta, conforme relatada em [Beran \(1994\)](#), pode ser descrita da seguinte forma. Suponha que queremos construir um reservatório cuja capacidade seja “ideal” para o intervalo de tempo entre t e $t+k$. Por capacidade ideal queremos dizer que: (1) o fluxo de saída é uniforme; (2) no tempo $t+k$ o reservatório está tão cheio quanto em t ; (3) o reservatório nunca transborda. Como hipóteses simplificadoras, vamos assumir que o tempo é discreto e que não há perdas de armazenamento substanciais (devido a evaporação, vazamentos etc.).

Vamos pensar em $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, a sequência de rBf, como sendo o fluxo de água que entra (ou sai, dependendo do sinal de Y) no reservatório em cada instante $i \in \mathbb{N}$. Se definirmos o processo $X = (X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ com $X_j = \sum_{i=1}^j Y_i$ podemos interpretá-lo como o fluxo de entrada acumulado até o tempo j . Desta forma pode-se mostrar que a capacidade ideal deve ser igual à amplitude ajustada, *adjusted range*:

$$R(t, k) = \max_{0 \leq i \leq k} \left[X_{t+i} - X_t - \frac{i}{k} (X_{t+k} - X_t) \right] - \min_{0 \leq i \leq k} \left[X_{t+i} - X_t - \frac{i}{k} (X_{t+k} - X_t) \right].$$

Vale notar que $R(t, k) \geq 0$, já que é a soma de termos positivos

A fim de estudar as propriedades que são independentes da escala, H. E. Hurst normalizou $R(t, k)$ por um estimador da variância de X_{t+1}, \dots, X_{t+k} , a saber

$$S(t, k) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=t+1}^{t+k} (Y_i - \bar{Y}_{t,k})^2},$$

onde $\bar{Y}_{t,k} = \frac{1}{k} \sum_{i=t+1}^{t+k} Y_i$.

Definição 4.1. (Estatística R/S) Definimos a estatística R/S como

$$Q_t = Q(t, k) = R(t, k)/S(t, k)$$

Para fins práticos precisamos mostrar que a recém definida estatística Q “converge”, em algum sentido. Enunciamos a seguir um teorema devido a Benoit Mandelbrot (ver Teoremas 5 e 11 de [Mandelbrot \(1975\)](#)).

Teorema 4.2. *Seja $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ tal que $Y^2 = (Y_t^2)_{t \geq 0}$ é ergódica e que $\frac{1}{c^H} \sum_{s=1}^{cr} Y_s \Rightarrow B_r^H$ quando $c \rightarrow +\infty$, onde \Rightarrow denota a convergência fraca. Então, para todo $t > 0$, quando $k \rightarrow +\infty$*

$$\frac{1}{k^H} Q_t \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi_t,$$

onde ξ_t é uma variável aleatória não degenerada.

Como consequência do Teorema 4.2 temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\log Q_t}{\log k} - H \right| &= \left| \frac{\log Q_t - H \log k}{\log k} \right| \\ &= \frac{\left| \log \frac{Q_t}{k^H} \right|}{\log k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Observação 4.3. Em nosso caso, Y é uma sequência de rBf e, portanto, $\frac{1}{c^H} \sum_{s=1}^{cr} Y_s = \frac{1}{c^H} B_{cr}^H = B_r^H$, pela auto-similaridade (ver Definição 2.20).

Assim, o procedimento a ser seguido para estimação de H é:

- (1) Subdivida a série em K blocos, cada um de tamanho N/K ;
- (2) Para cada *lag* t , começando em pontos $t_i = iN/K + 1$, calcule $Q(k_i, t)$ para todo k tal que $t_i + k \leq N$;
- (3) Faça o *pox plot*, ou seja, o gráfico de $\log Q$ contra $\log k$;
- (4) Estime H como o coeficiente angular da reta de mínimos quadrados para o *pox plot*.

4.4 Método do Periodograma

Para este método precisaremos definir a função de densidade espectral e o periodograma de processos estocásticos estacionários.

Definição 4.4. (Função de Densidade Espectral) Dada uma sequência estacionária, $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, de média zero e função de auto-covariâncias $\gamma(k)$ definimos a sua função de densidade espectral como sendo a transformada (discreta) de Fourier da sua função de auto-covariâncias, ou seja,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(k) e^{-i\lambda k}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pode-se mostrar (ver, por exemplo, [Robinson \(1995\)](#)) que a função de densidade espectral do rBf é dada por

$$f_H(\lambda) = C_H \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda + 2k\pi|^{-2H-1},$$

onde $C_H = \frac{4\sigma^2 \Gamma(2H-1)}{(2\pi)^{2H+2}} \cos(\pi(2H-1/2))$. Note que vale o seguinte com-

portamento assintótico (para $\lambda \approx 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{2H-1}} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{C_H}{\lambda^{2H-1}} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda + 2k\pi|^{-2H-1} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} C'_H \left(\frac{\sin \left(\frac{\lambda}{2} \right)}{\frac{\lambda}{2}} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|\lambda + 2k\pi|^{-2H-1}}{\lambda^{2H-1}} \\ &= C''_H. \end{aligned}$$

Definição 4.5. (Periodograma) Dada uma realização $(Y_k)_{k=1, \dots, N}$ de um processo estocástico estacionário $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ definimos o periodograma como

$$I^{(N)}(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi N} \left(\sum_{k=1}^N Y_k e^{-i\lambda_j k} \right)^2, \quad \lambda_j = 2\pi j/N, \quad - \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \leq j \leq \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor,$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Pode-se provar (ver, por exemplo [Morettin e Tolo \(2004\)](#)) que o periodograma é um estimador assintoticamente não viesado da função de densidade espectral, ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[I_j^{(N)}] = f(\lambda_j)$$

e que, sob a hipótese de que as observações são Gaussianas,

$$I_j^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{cases} \frac{1}{2} f(\lambda_j) \chi_2^2, & j \neq 0, N/2 \\ f(\lambda_j) \chi_1^2 & j = 0, N/2 \end{cases},$$

onde χ_ν^2 denota uma variável aleatória com distribuição χ^2 com ν graus de liberdade.

Como o periodograma é um estimador da função de densidade espectral, uma regressão do logaritmo do periodograma contra o logaritmo da frequência deveria encontrar um coeficiente angular igual a $1 - 2H$ quando $\lambda \approx 0$. Usualmente para tomarmos apenas valores de $\lambda \approx 0$ usam-se somente as 10% menores frequências.

4.5 Estimador de Whittle

A idéia deste estimador é usar a idéia de Whittle em [Whittle \(1953\)](#). Neste artigo o autor propõe uma aproximação da função de verossimilhança no contexto de séries temporais com “memória curta”. O artigo [Fox e Taqqu \(1986\)](#) trouxe esta idéia para o contexto dos processos com memória longa, em particular sequências de rBf’s.

Como estamos supondo que nossas observações Y_1, \dots, Y_N são rBf’s, podemos escrever a verossimilhança desse modelo como

$$l(H; Y) = (2\pi)^{-N/2} |\Sigma(H)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^T \Sigma^{-1}(H) y \right\},$$

onde denotamos por $y = (Y_1, \dots, Y_N)$ o vetor com todas as N observações, y^T seu transposto e $|\Sigma^{-1}(H)|$ o determinante da inversa da matriz de covariâncias, que é dada por

$$\Sigma_{i,j}(H) = \frac{1}{2} \left[|i|^{2H} - |i-j|^{2H} + |j|^{2H} \right].$$

Denotaremos por $L(H; y)$ o logaritmo da função de verossimilhança, ou seja,

$$L(H; y) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\Sigma(H)| - \frac{1}{2} y^T \Sigma^{-1}(H) y. \quad (4.4)$$

A maximização direta da (log-)verossimilhança em (4.4) não é recomendada devido a problemas computacionais, principalmente devido ao fato da matriz $\Sigma(H)$ tornar-se praticamente singular para H próximo de 1, pois, neste caso, as covariâncias decaem de forma extremamente lenta. Assim, uma abordagem alternativa é proposta em [Fox e Taqqu \(1986\)](#).

Os dois termos que dependem de H em (4.4) são o logaritmo do determinante da matriz de covariâncias,

$$\log |\Sigma_N(H)| \quad (4.5)$$

e a forma quadrática

$$\frac{1}{2} y^T \Sigma_N^{-1}(H) y, \quad (4.6)$$

onde deixamos explícita a dependência da matriz de covariâncias em N , o tamanho da amostra.

Em [Beran \(1994\)](#) é dito que

(1) o termo em (4.5) pode ser aproximado por $\frac{N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda|H) d\lambda$ (onde $f(\lambda|H)$ é a densidade espectral), pois

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log |\Sigma_N(H)|}{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda|H) d\lambda;$$

(2) em (4.6) podemos substituir a matriz $\Sigma_N^{-1}(H)$ por uma matriz $A(H)$, cujos elementos são mais fáceis de serem calculados (ver Beran (1994), Seção 3.4). Essa matriz $A(H)$ é uma matriz $N \times N$ definida como

$$A(H)_{j,l} = \alpha(j-l), \quad j, l = 1, \dots, N,$$

onde

$$\alpha(j-l) = (2\pi)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda|H)} e^{i(j-l)\lambda} d\lambda.$$

O Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) de H é a função das observações \hat{H} , tal que

$$\frac{\partial}{\partial H} L(\hat{H}; y) = 0. \quad (4.7)$$

Da expansão de Taylor da derivada da log-verossimilhança e por (4.7) temos que

$$0 = \frac{\partial}{\partial H} L(\hat{H}; y) \approx \frac{\partial}{\partial H} L(H; y) + \frac{\partial^2}{\partial H^2} L(H; y)(\hat{H} - H). \quad (4.8)$$

Portanto, combinando as aproximações de (4.5), (4.6) podemos aproximar (4.8) por

$$L^*(H; y) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{N}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda|H) d\lambda - \frac{1}{2} y^T A(H) y.$$

Como somente os dois últimos termos dependem de H , um EMV aproximado para H pode ser obtido através da minimização da função

$$\begin{aligned} L_W(H; y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda|H) d\lambda + \frac{y^T A(H) y}{N} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda|H) d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I^{(N)}(\lambda)}{f(\lambda|H)} d\lambda \right] \end{aligned}$$

com respeito a H . Na última igualdade denotamos por $I^{(N)}(\lambda)$ o periodograma, introduzido na Definição 4.5.

Note que podemos, facilmente, calcular uma aproximação para as integrais acima através de uma soma de Riemann utilizando as frequências de Fourier $\left(\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}\right)$ e portanto,

$$\tilde{L}_W(H; y) = 2\frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \log f(\lambda_j|H) \frac{2\pi}{N} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{I^{(N)}(\lambda_j)}{f(\lambda_j|H)} \frac{2\pi}{N} \right].$$

O estimador encontrado através da minimização desta função é dito ser o estimador de Whittle.

4.6 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados numéricos obtidos através de um estudo de *Bootstrap*. Foi utilizada a linguagem de programação R e o pacote **fArma** para simulação de seqüências de rBf e estimação do parâmetro H (ver [R Development Core Team \(2006\)](#) e [Wuertz \(2009\)](#)).

A idéia desse estudo é utilizar como *input* uma única seqüência de ruídos Brownianos fracionários. Para a construção de um “Intervalo de Confiança” será utilizada a técnica de *Bootstrap* (inicialmente apresentada em [Efron \(1979\)](#)), na qual obtem-se uma estimativa inicial para o parâmetro de interesse e, após isso, uma nova seqüência é gerada. Dada essa nova série temporal (que, vale ressaltar, não foi observada) é iniciado um procedimento iterativo, no qual a cada passo o parâmetro de interesse é estimado e utilizado para gerar uma nova série temporal. Baseado nessa nova série temporal uma nova estimativa do parâmetro é obtida e esse procedimento é repetido um número grande de vezes.

Em nosso estudo analisamos 100 replicações de séries temporais de tamanho 10.000 para valores de H variando de 0.55 a 0.8, com espaçamento de 0.05, segundo o seguinte algoritmo.

- (1) Para $H = 0,55, 0,60, 0,65, 0,70, 0,75$ e $0,80$;
- (2) Simule uma seqüência de ruídos Brownianos fracionários de tamanho 10.000 com o H escolhido em (1);

- (3) Estime H através de cada um dos métodos apresentados;
- (4) Simule, com as estimativas obtidas em (3), sequências de rBf's de tamanho 10.000;
- (5) Estime H através dos métodos apresentados nesta seção;
- (6) Simule, com as estimativas obtidas em (5), sequências de rBf's de tamanho 10.000;
- (7) Repita os passos (5) e (6) 100 vezes.

O resultado obtido neste estudo está sumarizado na Figura 4.2 e apresentado em detalhes na Tabela 4.1. Nesta figura, no eixo horizontal vemos, numerados de 1 a 5, os 5 métodos apresentados no Capítulo 4 (respectivamente, Variância Agregada, Valores Absolutos da Série Agregada, Estatística R/S, Método do Periodograma e Estimador de Whittle), para os diferentes valores de H . As barras verticais indicam o intervalo de confiança *bootstrap* e o ponto da mediana. Em cada um dos blocos verticais as linhas horizontais tracejadas indicam o valor real do parâmetro H .

Neste estudo podemos ver que o Estimador de Whittle é o que tem melhor desempenho, tanto do ponto de vista pontual quanto intervalar. Apesar de alguns estimadores, como a Estatística R/S, apresentarem um intervalo de confiança bastante extenso estes contemplaram o valor verdadeiro do parâmetro em quase todos os casos.

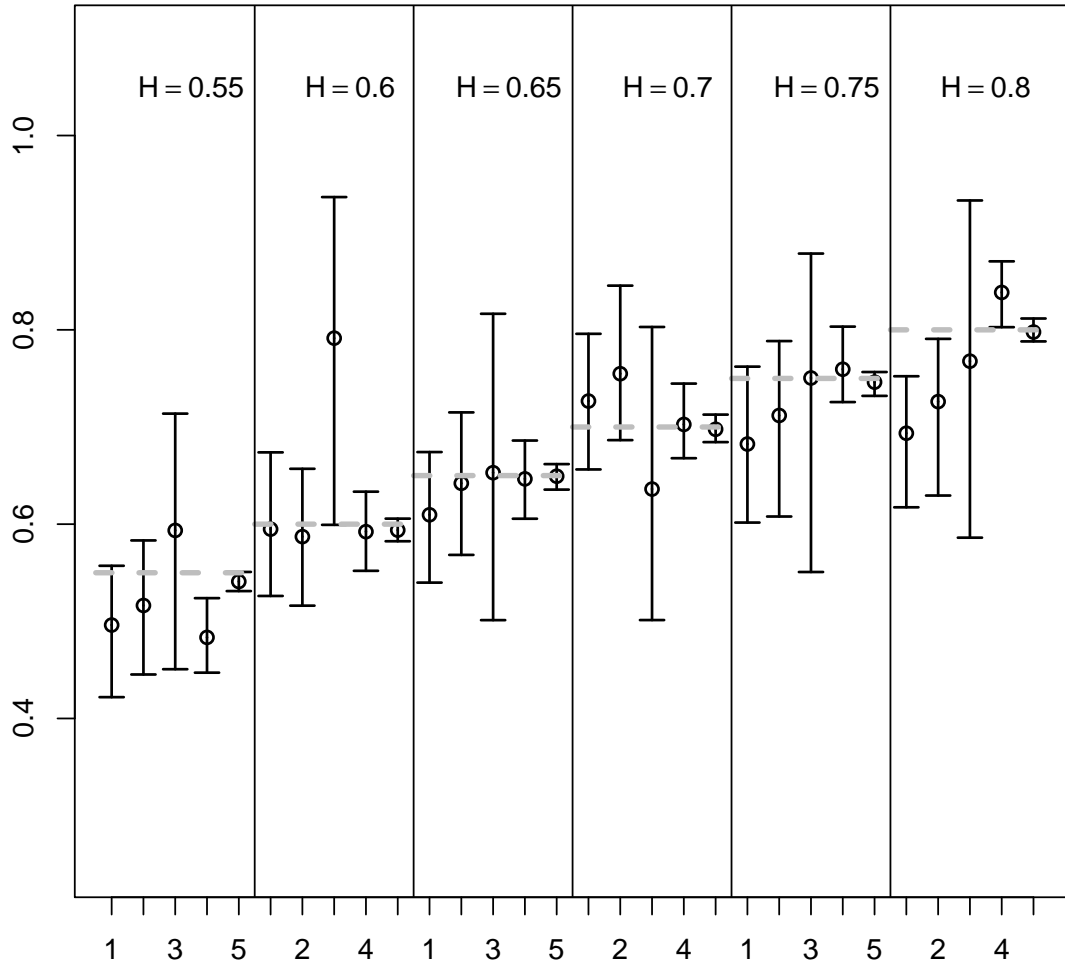


Figura 4.2: Intervalos de Confiança *Bootstrap* para diferentes valores de H e os seguintes estimadores: (1) Variância Agregada, (2) Valores Absolutos da Série Agregada, (3) Estatística R/S, (4) Método do Periodograma e (5) Estimador de Whittle.

Método de Estimação		Valor nominal de H					
		0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
Variância Agregada	$q_{97,5}$	0,557	0,674	0,674	0,796	0,762	0,752
	$q_{50,0}$	0,496	0,595	0,610	0,727	0,682	0,694
	$q_{2,25}$	0,422	0,526	0,540	0,656	0,602	0,617
Valores Abs. da Série Agregada	$q_{97,5}$	0,583	0,657	0,715	0,846	0,788	0,791
	$q_{50,0}$	0,516	0,587	0,642	0,755	0,712	0,726
	$q_{2,25}$	0,445	0,516	0,568	0,686	0,608	0,629
Estatística R/S	$q_{97,5}$	0,714	0,937	0,817	0,803	0,879	0,933
	$q_{50,0}$	0,594	0,791	0,653	0,636	0,750	0,768
	$q_{2,25}$	0,451	0,599	0,501	0,501	0,551	0,586
Periodograma	$q_{97,5}$	0,524	0,633	0,686	0,745	0,803	0,870
	$q_{50,0}$	0,483	0,592	0,647	0,703	0,759	0,839
	$q_{2,25}$	0,447	0,552	0,606	0,668	0,726	0,803
Whittle	$q_{97,5}$	0,551	0,606	0,662	0,713	0,757	0,812
	$q_{50,0}$	0,541	0,594	0,649	0,698	0,746	0,798
	$q_{2,25}$	0,531	0,582	0,636	0,684	0,732	0,788

Tabela 4.1: Quantis de 97,5, 50,0 e 2,25% obtidos através da distribuição encontrada por *bootstrap*.

4.7 Comentários

O leitor deve notar que os métodos de estimação apresentados neste capítulo podem somente ser utilizados no caso de observações oriundas de um movimento Browniano fracionário “puro”. Os modelos apresentados neste texto (de Bachelier e Black-Scholes fracionários) possuem outros parâmetros, a saber ν e σ , seguindo a notação introduzida no Teorema 2.48.

Uma possível abordagem para o problema de estimação do parâmetro H (e, como um subproduto, a volatilidade σ) será tratada em [Guerrera \(2010\)](#). Esboçaremos aqui a idéia deste trabalho, utilizando como exemplo o modelo de Black-Scholes fracionário. Relembrando, o modelo de Black-Scholes fracionário é dado por

$$Y_t = \exp \{ \nu + \sigma B_t^H \}, \quad t \in [0, T], \quad H \in (0, 1) \quad (4.9)$$

onde Y_t é o valor do ativo.

O modelo acima é um modelo a tempo contínuo, mas em problemas reais teremos $N + 1$ observações discretas. Essas observações serão os log-retornos. Trabalhando com observações diárias, definiremos os log-retornos diários como

$$r_k = \log \frac{Y_{k+1}}{Y_k}, \quad k = 0, \dots, N.$$

Assumindo a dinâmica em (4.9) temos que

$$\begin{aligned} r_k &= \log \frac{Y_{k+1}}{Y_k} = \\ &= \sigma (B_{k+1}^H - B_k^H). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{r} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma),$$

onde $\Sigma(i, j) = \frac{\sigma^2}{2} [|i - j + 1|^{2H} - 2|i - j|^{2H} + |i - j - 1|^{2H}]$ e $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$.

A proposta apresentada em [Guerrera \(2010\)](#) é baseada no paradigma Bayesiano e faz uso de aproximações analíticas para a distribuição a posteriori conjunta e posterioris marginais de (H, σ) . Este procedimento de inferência, que utiliza o método de Laplace (ver [Tierney e Kadane \(1986\)](#)), demanda muito pouco

tempo computacional, principalmente quando confrontado com os métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) e apresenta resultados (preliminares) animadores.

Capítulo 5

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

Este trabalho vem a se juntar a não tão vasta literatura acerca de aplicações do movimento Browniano fracionário em finanças. Apresentamos aqui duas alternativas para a solução da maior crítica que os modelos fracionários sempre receberam, a saber, a existência de possibilidades de arbitragem. Para a demonstração da inexistência de arbitragem as hipóteses adicionais incuídas nos modelos tornam-nos ainda mais realistas. Tanto o tempo mínimo de espera entre transações subsequentes quanto os custos de transação são presentes em qualquer sistema financeiro.

Um estudo interessante pode ser feito no que tange à necessidade (ou não) da inclusão da hipótese de admissibilidade (ver Definição 2.47). Como relatado no exemplo que precede esta definição, a necessidade de se incluir esta hipótese parece advir da existência de arbitragens baseadas em *doubling strategies*. No entanto esse tipo de estratégia deixaria de ser uma arbitragem dadas as restrições de (1) custos proporcionais (neste caso o agente poderia ter um custo infinito para levar esta estratégia a cabo) ou (2) tempo mínimo de espera entre as transações (se o agente não lucrar rapidamente terá que negociar cada vez mais rápido o que será impossível).

Outra possível direção para pesquisas futuras é a apresentada na Seção 4.7. Mesmo que não sejam seguidas as idéias apresentadas nesta seção, o problema

de estimação do parâmetro de dependência de longo prazo no modelo de Black-Scholes fracionário, por exemplo, não parece ter sido solucionado (nem sequer tratado) na literatura.

Referências Bibliográficas

- Arcones, M. (1995) On the law of the iterated logarithm for Gaussian processes. *Journal of Theoretical Probability*, **8**, 877–903.
- Bachelier, L. (1900) *Theorie de la speculation*. Gauthier-Villars Paris.
- Beran, J. (1994) *Statistics for long-memory processes*. Chapman & Hall/CRC.
- Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B. e Zhang, T. (2008) *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*. Springer Verlag.
- Billingsley, P. (1968) *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons.
- (2008) *Probability and measure*. Wiley.
- Black, F. e Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, **81**, 637.
- Breiman, L. (1969) *Probability and stochastic processes: with a view toward applications*. Houghton Mifflin Harcourt (HMH).
- Brockwell, P. e Davis, R. (1991) *Time series: theory and methods*. Springer.
- Cajueiro, D., Gogas, P. e Tabak, B. (2009) Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of the Athens stock exchange. *International Review of Financial Analysis*, **18**, 50–57.
- Cheridito, P. (2001) *Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modelling*. Tese de Doutorado, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

- (2003) Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance and Stochastics*, **7**, 533–553.
- Cont, R. e Tankov, P. (2004) *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC.
- Da Silva, S., Matsushita, R., Gleria, I. e Figueiredo, A. (2007) Hurst exponents, power laws, and efficiency in the Brazilian foreign exchange market. *Economics Bulletin*, **7**, 1–11.
- Decreusefond, L. e Üstünel, A. (1999) Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential analysis*, **10**, 177–214.
- Delbaen, F. e Schachermayer, W. (1994) A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, **300**, 463–520.
- (2004) What is... A Free Lunch. *Notices of the AMS*, **51**, 526–528.
- Doukhan, P., Taqqu, M. e Oppenheim, G. (2003) *Theory and applications of long-range dependence*. Birkhauser.
- Efron, B. (1979) Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, **7**, 1–26.
- Fox, R. e Taqqu, M. S. (1986) Large-sample properties of parameters estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *The Annals of Statistics*, **14**, 517–532.
- Greene, M. e Fielitz, B. (1977) Long-term dependence in common stock returns. *Journal of Financial Economics*, **4**, 339–349.
- Guasoni, P. (2002) *Optimal investment problems under market frictions*. Tese de Doutorado, Scuola Normale Superiore.
- (2006) No arbitrage under transaction costs, with fractional Brownian motion and beyond. *Mathematical Finance*, **16**, 569–582.

- Guerrera, T. (2010) *Aproximações determinísticas para posterioris marginais*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Gursakal, N., Aydin, Z., Gursakal, S. e Tuzunturk, S. (2009) Hurst exponent analysis in Turkish stock market. *International Journal of Sustainable Economy*, **1**, 255–269.
- Harrison, J. e Kreps, D. (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, **20**, 381–408.
- Harrison, J. e Pliska, S. (1981) Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stoch. Em Proc. Appl*, vol. 11, 215–260.
- Hurst, H. (1951) Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, **116**, 35.
- Irle, A. e Prelle, C. (2008) A note on arbitrage under transaction costs. *Kiel Institute for the World Economy*.
- Kallenberg, O. (1997) *Foundations of modern probability*. Springer.
- Kallianpur, G. (1971) Abstract Wiener processes and their reproducing kernel Hilbert spaces. *Probability Theory and Related Fields*, **17**, 113–123.
- Karatzas, I. e Shreve, S. (1991) *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer.
- (2001) *Methods of mathematical finance*. Springer.
- Klebaner, F. (2005) *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press.
- Kolmogorov, A. (1940) Wienerische Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertsche Raum. Em *CR (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, vol. 26, 115–118.
- Mandelbrot, B. (1963) The variation of certain speculative prices. *Journal of business*, **36**, 394.

- (1975) Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Probability Theory and Related Fields*, **31**, 271–285.
- (1979) *Fractals: Form, Chance and Dimension*. W.H.Freeman and Co Ltd.
- Mandelbrot, B. e Van Ness, J. (1968) Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, **10**, 422–437.
- Marcus, M. e Rosen, J. (2006) *Markov processes, Gaussian processes, and local times*. Cambridge Univ Pr.
- Morettin, P. A. e Tolo, C. M. C. (2004) *Análise de Séries Temporais*. Edgard Blücher.
- Ohashi, A. (2009) Fractional term structure models: No-arbitrage and consistency. *The Annals of Applied Probability*, **19**, 1553–1580.
- Oksendal, B. (2007) *Stochastic differential equations*. Springer.
- Protter, P. (2004) *Stochastic integration and differential equations*. Springer Verlag.
- R Development Core Team (2006) *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL:<http://www.R-project.org>. ISBN 3-900051-07-0.
- Rea, W., Reale, M., Brown, J. et al. (2009) Estimators for Long Range Dependence: An Empirical Study. *Arxiv preprint arXiv:0901.0762*.
- Revuz, D. e Yor, M. (1999) *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer.
- Robinson, P. (1995) Log-periodogram regression of time series with long range dependence. *The Annals of Statistics*, **23**, 1048–1072.
- Rogers, L. (1997) Arbitrage with fractional Brownian motion. *Mathematical Finance*, **7**, 95–105.
- Rudin, W. (2006) *Functional Analysis*. McGraw-Hill.

- Samko, S., Kilbas, A. e Marichev, O. (1993) *Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Transl. from the Russian*. New York, NY: Gordon and Breach.
- Souza, S., Tabak, B. e Cajueiro, D. (2006) Investigaç o da mem ria de longo prazo na taxa de c mbio no Brasil. *Revista Brasileira de Economia*, **60**, 193–209.
- Taqqu, M., Teverovsky, V. e Willinger, W. (1995) Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*, **3**, 785–798.
- Tierney, L. e Kadane, J. (1986) Accurate approximations for posterior moments and marginal distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 82–86.
- Tousson, O. (1925) M moire sur l’histoire du Nil. *M moires de l’Institut d’Egypte*, **18**, 366–404.
- Whittle, P. (1953) Estimation and information in stationary time series. *Arkiv f r matematik*, **2**, 423–434.
- Wuertz, D. (2009) *fArma: ARMA Time Series Modelling*. URL:<http://cran.r-project.org/web/packages/fArma>. R package version 2100.76.