

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Departamento de Métodos Estatísticos

*Estratégias de Cobertura e
Calibração da Medida Risco-Neutra
em Mercados Regidos por Processos
de Lévy.*

Eduardo Jotha da Costa

Orientador: Prof. Dr. Glauco Valle

Rio de Janeiro

Abril 2011

Eduardo Jotha da Costa

*Estratégias de Cobertura e Calibração da Medida
Risco-Neutra em Mercados Regidos por Processos de Lévy*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador:
Glauco Valle da Silva Coelho

Departamento de Métodos Estatísticos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Abril de 2011

Folha de exame

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Eduardo Jotha da Costa

Banca examinadora:

Glauco Valle da Silva Coelho
Instituto de Matemática - UFRJ

Carlos Antônio Abanto-Valle
Instituto de Matemática - UFRJ

Max Oliveira de Souza
Instituto de Matemática - UFF

“ Fazer uma coisa de cada vez, como um mestre definiu a essência da filosofia zen, significa dedicar-se plenamente ao que está fazendo. É um ato de entrega - uma ação poderosa.”

Eckhart Tolle.

A todos que me apoiaram e me incentivaram a completar este trabalho.

Agradecimentos

Fundamental para a minha caminhada até este ponto, sem dúvida, foi a minha família. Agradeço especialmente ao meu pai Cláudio, à minha mãe Leila, ao meu irmão Henrique, à minha boadrasta Ana Cléa e à Mayume pelo apoio e incentivo nos momentos mais difíceis, naqueles em que pensei em desistir. Aos meus amigos, um grande agradecimento por me incentivarem a terminar o programa e por me acompanharem nesta trajetória difícil de crescimento intelectual. Um profundo agradecimento ao Vitor Alney (este foi, dentre eles, o que mais me ajudou, pela companhia no dia a dia, especialmente no primeiro ano de curso), ao Ciro Paolucci, ao Rafael Rodrigues Carvalho (vovô), e ao Rodrigo Targino (principalmente por me apresentar ao mundo da modelagem financeira fato que ocorreu no congresso do IMPA em Búzios). Agradeço ao professor Jorge Zubelli do IMPA por ter aceito a minha participação no congresso e financiado a minha ida. Sinto uma profunda gratidão ao programa de pós-graduação em Estatística da UFRJ por me receber bem em uma estrutura organizada e por possuir profissionais de altíssimo gabarito em todos os cursos oferecidos. Cito, em especial, os professores Ney, Dani, Leandro, Alexandra e Migon, este o responsável pela minha admissão assim como pelo financiamento do CNPq ao meu curso de mestrado. Agradeço também ao professor Jorge Achcar pelo excelente curso de verão ministrado. Ao professor Glaucio Valle um grande agradecimento por ser um dos principais responsáveis por este trabalho ter chegado onde chegou, dedicando seu tempo para esclarecer minhas dúvidas, para me explicar conceitos importantes e para auxiliar na construção de um texto mais claro e conciso. Sou muito grato a todos que me ajudaram a chegar aqui, seja através de auxílio financeiro, emocional ou até mesmo indiretamente ao se esforçar para oferecer uma infra-estrutura de primeira linha para que os trabalhos fossem desenvolvidos.

Eduardo Jotha da Costa

Abril de 2011

Resumo

A modelagem financeira por processos que admitem saltos tem sido cada vez mais considerada na literatura financeira dos últimos anos. Nesta dissertação, exploramos a modelagem financeira por processos de Lévy. Esta classe de processos estocásticos possui características interessantes como, por exemplo, saltos em sua trajetória e existência de forma analítica para a sua função característica.

Neste trabalho, são apresentados os principais teoremas do apereçamento de ativos e a sua relação com os conceitos de ausência de arbitragem e completude de mercado. Em seguida, são verificadas as implicações destes teoremas em mercados cujos preços seguem processos de difusão com saltos, caso particular de processos de Lévy.

Além disso, é feita uma breve exposição sobre processos de Lévy: sua definição, características, mudanças de medida envolvendo esta classe de processos e sua relação com a incompletude do mercado. Assim como são apresentadas diversas estratégias de cobertura envolvendo mercados cujos preços são regidos por processos de Lévy.

Ainda, é implementado um método de calibração Bayesiano a partir de preços de contratos de opção de compra européia do mercado. Este método, apresentado em Cont & Tankov (2004a), nasce do conceito, explorado em Dupire (1994), de auto-regulamentação do mercado no modelo teórico: preços de contratos devem dizer quem é a medida risco-neutra mais adequada. Para a obtenção da medida de Lévy a partir de preços de contratos de opções de compra européia, utilizamos o método descrito em Carr & Madan (1999) que nos fornece preços destes contratos a partir de processos de Lévy. Além disso, fazemos uso de dados simulados e de dados reais nas abordagens paramétrica e não-paramétrica.

Ao final deste trabalho, incluímos também algumas provas formais de resultados importantes utilizados na calibração.

Abstract

The financial modelling with jump processes has been increasingly considered in the financial literature of the latest years. In this dissertation we explore the financial modelling by Lévy processes. This class of stochastic processes has interesting features such as jumps in its trajectory and the existence of an analytical form for its characteristic function.

In this work the main theorems of asset pricing are introduced as well as their relation with the concepts of no arbitrage and market completeness. Then we verify the implications of these theorems on markets with prices following a jump-diffusion process, particular case of a Lévy process.

Also, we present a brief exposition about Lévy processes: definition, features, change of measure involving this class of processes and its relation with market incompleteness. We present several hedging strategies involving markets ruled by Lévy processes as well.

Still, we implement a Bayesian calibration method using observed Call option prices, this method presented in Cont & Tankov (2004a) is a development of the concept explored in Dupire (1994) of the market's self-regulation on the theoretical model: contract prices should point to the correct risk-neutral measure. To obtain the Lévy measure from Call option prices we use the method described in Carr & Madan (1999) that provides these contract prices from Lévy processes. Also, we make use of simulated and real data in the parametric and non-parametric approaches.

In the end of this work, we include some formal proofs of important results used in the calibration procedure.

Sumário

Introdução	1
1 Teoremas Fundamentais do Apreçamento de Ativos	3
1.1 Regras de apreçamento e medidas risco-neutras	3
1.2 Ausência de arbitragem e a existência de medidas martingais equivalentes	5
1.3 Completude de mercado e a unicidade da medida martingal equivalente	8
2 Processos de Lévy	9
2.1 O Movimento Browniano	10
2.1.1 O Movimento Browniano Geométrico	11
2.2 O Processo de Poisson	11
2.2.1 Construção	12
2.2.2 Processo de Poisson composto	13
2.3 Medidas risco-neutras e processos de Lévy	14
2.4 Discussão sobre incompletude do mercado em modelos de difusão com saltos	18
2.4.1 Três ativos e dois processos de Poisson	20
3 Estratégias de cobertura em modelos de Lévy exponenciais	23
3.1 Cobertura Delta de Merton	23
3.2 Supercobertura	25
3.3 Maximização da Utilidade	26
3.4 Cobertura Quadrática Média-Variância	28
3.5 Estratégias de cobertura utilizando preços de contratos	29
4 Calibração em modelos de Lévy exponenciais	31
4.1 Problema de Calibração	31
4.2 Implementação computacional	33
4.3 Calibração paramétrica (Dados simulados)	36
4.4 Calibração paramétrica (Dados reais)	49
4.5 Calibração não-paramétrica (Dados simulados)	54
4.6 Calibração não-paramétrica (Dados reais)	63
4.7 Propriedades da solução	68
A Apreçamento de opções pela transformada rápida de Fourier	77

Introdução

Desde o início da modelagem financeira a tempo contínuo, os processos de difusão têm sido utilizados para descrever a dinâmica dos ativos do mercado. Contudo, sua incapacidade de reproduzir propriedades empíricas dos retornos de ativos e dos preços de opções incitou a busca por outras classes de processos estocásticos que poderiam ser usados para modelá-los de forma mais realista. Três dessas classes são: os Processos Fracionários (Movimento Browniano Fracionário ou funções deste), os Processos de Volatilidade Estocástica e os Processos de Lévy. As duas primeiras aparecem bem descritas respectivamente nas exposições Targino (2010) e Saporito (2009). Neste trabalho, trataremos da modelagem de preços de ativos por processos de Lévy que, contrário às demais classes, são processos que admitem saltos nas trajetórias, característica esta que pode ser observada no mercado financeiro.

Inicialmente, vamos discutir sobre questões relevantes que surgem na modelagem de preços por processos de Lévy. Por exemplo, ao assumirmos a hipótese de ausência de arbitragem no mercado, obtemos a existência de uma medida de probabilidade martingal Q equivalente à medida de probabilidade que rege os preços. Essa medida martingal corresponde a uma regra de apreçamento π na qual o valor de qualquer pagamento aleatório H é dado por $\pi_0(H) = e^{-rT} E^Q[H]$, e por isso ela é dita medida risco-neutra. Em modelos de difusão como o de Black-Scholes-Merton esta medida é única: só existe uma forma de apreçar um pagamento H em um mercado livre de arbitragem. Este valor é o custo inicial para efetuar a estratégia de cobertura perfeita, e dizemos que, neste caso, estamos trabalhando em um mercado completo.

No entanto, em mercados cujos preços de ativos são regidos por processos de Lévy, diferentemente dos processos de difusão clássicos, não é possível efetuar uma estratégia de cobertura perfeita para todo pagamento H . Este fato costuma ser resumido ao dizermos que o mercado é incompleto, ou seja, existe mais de uma forma de apreçamento (representada pela medida risco-neutra) e cada uma nos indica uma estratégia de cobertura (com erro) para um determinado pagamento. Assim, surge a questão natural: como apreçar contratos nestes mercados? Ou ainda: qual é a regra de apreçamento mais adequada? Essas perguntas começam a ser respondidas identificando a classe de medidas martingais equivalentes (risco-neutras) e, em seguida, escolhendo medidas apropriadas, por exemplo, medidas que forneçam estratégias de cobertura eficientes segundo algum critério. De outro ponto de vista, desde o trabalho de Dupire (1994) para o modelo de Black-Scholes-Merton, são estudados os efeitos da auto-regulamentação do mercado no modelo teórico: preços de contratos devem dizer quem é a medida martingal equivalente precificadora. Isto está relacionado a estratégias de cobertura (com erro) que utilizam

preços de contratos no lugar dos preços dos ativos.

Portanto, estudaremos formas de determinar a medida martingal equivalente Q que nos leva ao menor erro possível para a estratégia de cobertura segundo algum critério de minimização. Em Merton (1976), o autor escolhe a medida de probabilidade equivalente que protege contra o risco proveniente do processo de difusão, mantendo o portfólio exposto ao risco de saltos individuais. Já em Kou (2002), o autor adota a medida de probabilidade equivalente cuja medida de Lévy segue uma exponencial dupla, o que corrige determinadas propriedades estatísticas observadas nas séries de preços. Outra metodologia a se destacar aparece nas publicações Cont & Tankov (2004b) e Cont & Tankov (2006). A proposta dos autores é recuperar a medida martingal equivalente através dos preços de contratos. Com esse intuito, eles minimizam a distância quadrática entre os preços observados e os preços teóricos de contratos sob medidas martingais provenientes de distribuições de processos de Lévy.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 1 são descritos os dois principais teoremas do apreçamento de ativos assim como a sua relação com os conceitos de ausência de arbitragem e completude de mercado. Também são descritos os conceitos matemáticos e de finanças necessários para o bom entendimento desses conceitos como, por exemplo, medidas martingais, estratégias de cobertura e direito contingente. As principais referências para esse capítulo são Cont & Tankov (2004a) e Shreve (2004). No capítulo 2, são descritos os processos de Lévy: apresentamos sua definição, propriedades e casos particulares como, por exemplo, o movimento Browniano e o processo de Poisson composto. Além disso, abordamos mudanças de medidas envolvendo determinados processos de Lévy e condições para que medidas cujas distribuições seguem processos de Lévy sejam equivalentes. E, por último, é discutido um exemplo de preços dos ativos do mercado seguindo um processo de Lévy, onde não é possível efetuar uma estratégia de cobertura perfeita e, portanto, este mercado é incompleto. As principais referências para este capítulo são Sato (1999), Applebaum (2004), Cont & Tankov (2004a) e Shreve (2004). No capítulo 3, são apresentadas diversas estratégias de cobertura com erro envolvendo ativos cujo preço segue um processo de Lévy. As principais referências para este conteúdo estão presentes em Shreve (2004), Cont & Tankov (2004a) e Merton (1976). No capítulo 4, tratamos sobre o problema de calibração que consiste em recuperar a distribuição de contratos do mercado a partir de preços de contratos negociados. Descrevemos, neste capítulo, um método de calibração que envolve a minimização de uma função quadrática e de uma função de regularização (entropia relativa). Além disso, aplicamos o algoritmo de calibração paramétrico e não-paramétrico para dados simulados e para dados reais de mercado. As principais referências para este capítulo são Cont & Tankov (2004b), Cont & Tankov (2006), Carr & Madan (1999), Kou (2002), Byrd et al. (1995).

Capítulo 1

Teoremas Fundamentais do Apreçamento de Ativos

1.1 Regras de apreçamento e medidas risco-neutras

Consideremos um mercado cujas possíveis evoluções em $[0, T]$ estão descritas no espaço $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$. Para t fixo, denotamos por \mathfrak{F}_t a σ -álgebra gerada pelos processos de preços até o tempo t , ou seja, \mathfrak{F}_0 contém a informação sobre os preços em $t = 0$ e $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}$ contém toda a história dos preços até o tempo T . $\{(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}\}$ é a chamada filtração do processo. O preço dos ativos será descrito pela seguinte função:

$$S : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$$
$$(t, \omega) \rightarrow (S_t^0(\omega), S_t^1(\omega), \dots, S_t^d(\omega)), \quad (1.1)$$

sendo $S_t^k(\omega)$ o valor do ativo k , no tempo t , no cenário de mercado ω , e S_t^0 é um ativo livre de risco, ou seja, um ativo cuja evolução segue uma taxa de juros fixa r dado por $S_t^0 = \exp(rt)$. O preço descontado de um ativo S_t^k é dado por $\hat{S}_t^k = S_t^k / S_t^0$. Além disso, S_t^k é um processo estocástico positivo quase certamente para todo k .

Definição 1.1 (Direito contingente). *Um direito contingente é um contrato financeiro cujo valor é função de ativos. Ou seja, depende de variáveis subjacentes. Comumente, essas variáveis subjacentes são preços de ativos negociados no mercado. Um direito contingente com maturidade $t = T$, pode ser representado especificando-se todos os possíveis pagamentos contingentes $H(\omega, T)$, sendo H uma função: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, \mathfrak{F}_T -mensurável. Exemplos clássicos de direitos contingentes são as Calls (opção de compra) e Puts (opção de venda) européias, nas quais H assume respectivamente os valores:*

$$H(\omega, T) = (S_T^k - K)^+, H(\omega, T) = (K - S_T^k)^+, k \in \{1, 2, \dots, d\}, \text{ fixo.} \quad (1.2)$$

Definição 1.2 (Regra de apreçamento). *Uma regra de apreçamento é um procedimento que atribui a cada pagamento H um valor $\pi_t(H) \in \mathbb{R} \forall t \in [0, T]$. Para que esta regra de apreçamento possua sentido financeiro, ela deve obedecer a requisitos mínimos:*

(i) A informação disponível em t deve ser suficiente para avaliar π_t . Ou seja, π_t deve ser um processo \mathfrak{S}_t -mensurável $\forall t$.

(ii) Um pagamento positivo deve ter também um valor positivo:

$$\forall \omega \in \Omega, H(\omega) \geq 0 \Rightarrow \forall t \in [0, T], \pi_t(H) \geq 0. \quad (1.3)$$

(iii) Um outro requisito é a linearidade:

$$\pi_t \left(\sum_{j=1}^J H_j \right) = \sum_{j=1}^J \pi_t(H_j). \quad (1.4)$$

Para todo evento $A \in \mathfrak{S}$, definiremos a variável aleatória 1_A representando o direito contingente que paga 1 em T se A ocorrer, ou 0 se A não ocorrer. De forma particular, 1_Ω é o título que paga 1 em T . O seu valor em t é dado pelo valor em T descontado à taxa de juros r , ou seja:

$$\pi_t(1) = e^{-r(T-t)}.$$

Definiremos agora $Q: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$Q(A) = \pi_0(1_A) / \pi_0(1) = e^{rT} \pi_0(1_A).$$

Repare que:

$$(i) 0 \leq 1_A \leq 1 \Rightarrow 0 \leq Q(A) \leq 1.$$

$$(ii) \text{ Se } A \text{ e } B \text{ são eventos disjuntos, } 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B \Rightarrow Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B).$$

Se nós estendermos o conceito de linearidade à somas infinitas, percebemos que Q é uma medida de probabilidade em (Ω, \mathfrak{S}) .

Repare que, a partir de uma regra de apuração, nós construímos uma medida de probabilidade em (Ω, \mathfrak{S}) . Podemos também, a partir da medida de probabilidade Q , recuperar a regra de apuração. Isto é feito de seguinte forma: consideremos pagamentos finais de opções da forma $H = \sum c_i 1_{A_i}$, pela linearidade e continuidade da regra de apuração π , obtemos que para qualquer pagamento aleatório H :

$$\pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^Q[H | \mathfrak{S}_t].$$

Perceba o impacto desta equação: todo direito contingente negociado no mercado tem o seu preço em t dado pelo valor descontado da esperança sob Q do seu pagamento **aleatório** $H = H_T$. Por este motivo Q é denominada medida **risco-neutra**. Este exemplo indica que existe uma relação 1 a 1 entre medidas risco-neutras e regras de apuramentos lineares. Este fato será melhor abordado na próxima seção.

1.2 Ausência de arbitragem e a existência de medidas martingais equivalentes

Assumiremos a existência de uma medida de probabilidade P em (Ω, \mathfrak{F}) . Ela reflete o conhecimento do especialista sobre os ativos em questão ou, por exemplo, algum tipo de análise econométrica dos ativos.

Um questionamento que podemos fazer é: já que assumimos a existência da P , por que criar uma medida risco-neutra Q e qual o papel da sua equivalência com respeito à P ? [Q ser equivalente à P significa que $\forall A \in \mathfrak{F}, P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$]

Uma resposta a este questionamento é que a medida P possui apenas as propriedades estatísticas da série de preços: ela não carrega sentido econômico em sua estrutura. Assim, precisamos de uma medida incorporada do pensamento econômico, ou seja, criada a partir de uma regra de apreçamento π coerente com as correntes de pensamento do mercado. E, ao mesmo tempo, queremos que essa nova medida possua propriedades essenciais do processo que rege os preços, como, por exemplo, algumas propriedades estatísticas, assim como o conjunto de eventos considerados possíveis. Por isso, estudaremos medidas risco-neutras equivalentes à P .

Estamos interessados em analisar características que uma regra de apreçamento deve possuir para que seja compatível com o funcionamento equilibrado de um mercado. A principal característica, a ausência de arbitragem, será descrita a seguir na definição 1.7.

Definição 1.3. *Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma filtração $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ é uma coleção de σ -álgebras tal que $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F} \forall s < t$. Um processo estocástico $\{Z_t, t \geq 0\}$ é dito ser um **Martingal** com respeito a P se:*

(i) Z_t é \mathfrak{F}_t -mensurável. Ou seja, $\{Z_t, t \geq 0\}$ é \mathfrak{F}_t -adaptado.

(ii) $E^P[|Z_t|] < \infty, \forall t$.

(iii) $E^P[Z_t | \mathfrak{F}_s] = Z_s, \forall s < t$.

Se o preço descontado dos ativos negociados no mercado for martingal sob a medida de probabilidade P , então dizemos que P é medida martingal. Como pode ser visto em Delbaen & Schachermayer (1994), o preço descontado dos ativos são considerados martingais locais.

Definição 1.4. *Uma estratégia é um vetor de processos estocásticos $\phi_t = (\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)}, \dots, \phi_t^{(d)})$, $t \in [0, T]$. Sendo $\phi_t^{(k)}$ \mathfrak{F}_t -mensurável representando a quantidade do ativo $S_t^{(k)}$ que o investidor detém em t .*

Definição 1.5. *Dada uma estratégia ϕ , definimos o portfólio associado como o vetor $(d+1)$ -dimensional: $(\phi_t^{(0)} S_t^0, \phi_t^{(1)} S_t^1, \dots, \phi_t^{(d)} S_t^d)$, $t \in [0, T]$ e o seu valor é dado por:*

$$V_t(\phi) = \sum_{i=0}^d \phi_t^{(i)} S_t^i, t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

Considere um ativo financeiro cujo preço é representado pelo processo estocástico $(S_t)_{t \in [0, T]}$. Se um investidor efetua negociações nos tempos aleatórios $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_{n+1} = T$, detendo a quantidade ϕ_i do ativo no intervalo $]T_i, T_{i+1}[$, sendo T_i tempos de parada e ϕ_i \mathfrak{S}_{T_i} -mensuráveis $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, o ganho de capital, em $t \in [0, T]$ fixo, resultante dos movimentos de mercado será dado por:

$$\sum_{i=0}^n \phi_i (S_{T_{i+1} \wedge t} - S_{T_i \wedge t}), \quad (1.6)$$

considerando $T_i \wedge t = \min\{T_i, t\}$.

Essa quantidade será denotada por $\int_0^t \phi dS$ e é chamada de integral estocástica de ϕ com respeito a S . Para efeito da existência (finitude) desta integral, iremos supor ϕ limitada $\forall t \in [0, T]$.

De fato, a equação 1.6 possui várias propriedades da integral como positividade e linearidade. Este conceito pode ser generalizado para classes mais amplas de integrandos ou estratégias através da chamada integral de Itô quando S_t é um martingal quadrado integrável, ver Karatzas & Shreve (1991) ou Oksendal (1998).

Proposição 1.1. *Se $(S_t)_{t \in [0, T]}$ é um martingal, então para todo processo limitado ϕ a integral estocástica $G_t = \int_0^t \phi dS$ também é um martingal.*

Demonstração. (i) Como cada ϕ_i é limitado e $E|S_{T_i}| < \infty$, por construção: $E|G_t| < \infty$.

$$(ii) E[\phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) | \mathfrak{S}_t] = E[1_{t > T_{i+1}} \phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) | \mathfrak{S}_t] + \\ + E[1_{T_i \leq t \leq T_{i+1}} \phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) | \mathfrak{S}_t] + E[1_{t \leq T_i} \phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) | \mathfrak{S}_t].$$

Como $\{1_{t > T_{i+1}}\}$, $\{1_{T_i \leq t \leq T_{i+1}}\}$ e $\{1_{t \leq T_i}\}$ são \mathfrak{S}_t -mensuráveis eles podem sair de dentro da esperança condicional. De forma que obtemos:

$$E[\phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) | \mathfrak{S}_t] = 1_{t > T_{i+1}} \phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) + \\ + 1_{T_i \leq t \leq T_{i+1}} \phi_i(S_t - S_{T_i}) + 1_{t \leq T_i} E[\phi_i E[S_{T_{i+1}} - S_{T_i} | \mathfrak{S}_{T_i}] | \mathfrak{S}_t].$$

Repare que, no terceiro termo, foi utilizada a lei das esperanças condicionais iteradas ($E[X] = E[E[X|Y]]$). Como S_t é martingal esse terceiro termo é igual a zero, já que $E[S_{T_{i+1}} | \mathfrak{S}_{T_i}] = S_{T_i}$ e T_i é limitado $\forall i$ pelo teorema da amostragem opcional, ver Oksendal (1998) ou Cont & Tankov (2004a).

Assim, obtemos o resultado desejado:

$$E[\phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) | \mathfrak{S}_t] = 1_{t > T_{i+1}} \phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) + \\ + 1_{T_i \leq t \leq T_{i+1}} \phi_i(S_t - S_{T_i}) = \phi_i(S_{T_{i+1}^t} - S_{T_i^t}).$$

□

Definição 1.6. Uma estratégia ϕ é dita auto-financiável se para todo $t \in [0, T]$:

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=0}^d \int_0^t \phi^{(k)} dS^k, \text{ quase certamente em } P.$$

ou seja, as alterações no valor do portfólio se devem somente às variações do preço. Nenhum recurso monetário é adicionado ou retirado do portfólio.

Definição 1.7 (Arbitragem). Uma estratégia auto-financiável ϕ é uma arbitragem se um portfólio de valor V_t puder levar a ganhos positivos sem a possibilidade de ocorrência de perda, ou seja:

$$P(\forall t \in [0, T], V_t(\phi) > 0) = 1 \text{ e } P(V_T(\phi) > V_0(\phi)) \neq 0.$$

Assumiremos que não existe arbitragem no mercado.

Teorema 1.1 (Primeiro teorema fundamental do apreçamento de ativos). *O modelo de mercado definido por $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$, com preços de ativos dados por $(S_t^k)_{t \in [0, T]}$, é livre de arbitragem se e somente se existe uma medida de probabilidade $Q \sim P$ tal que os preços dos ativos descontados sejam martingais com respeito a Q .*

Demonstração. (\Rightarrow) Consideraremos a existência de uma regra de apreçamento π representada por uma medida de probabilidade Q como na seção 1.1, para mais detalhes ver Cont & Tankov (2004a). Podemos vender um ativo S^k em T , gerando um pagamento final S_T^k ou podemos vendê-lo em t , gerando em T o pagamento final de $e^{r(T-t)} S_t^k$. Como estamos considerando ausência de arbitragem, estas duas estratégias devem ter o mesmo valor em t :

$$E^Q[S_T^k \mid \mathfrak{F}_t] = E^Q[e^{r(T-t)} S_t^k \mid \mathfrak{F}_t] = e^{r(T-t)} S_t^k.$$

Dividindo ambos os lados por S_T^0 , obtemos:

$$E^Q[S_T^k / S_T^0 \mid \mathfrak{F}_t] = S_t^k / S_t^0.$$

Conclui-se então que ausência de arbitragem implica que o valor descontado dos ativos negociáveis são **martingais** sob a medida de probabilidade Q .

(\Leftarrow) Consideremos Q uma medida martingal equivalente. Temos então que S_T^k / S_T^0 é martingal sob Q . Como já demonstrado, $V_t(\phi) = V_0 + \int_0^t \phi d\hat{S}$ é martingal, de modo que $E^Q \left[\int_0^t \phi dS \right] = 0$. Portanto, a variável aleatória $\int_0^t \phi dS$ deve assumir tanto valores negativos como positivos, de modo que: $Q \left(V_T(\phi) - V_0 = \int_0^t \phi dS \geq 0 \right) \neq 1$. Como P e Q são equivalentes, $P \left(\int_0^t \phi dS \geq 0 \right) \neq 1$ e ϕ não pode ser uma estratégia que admite arbitragem. Portanto, existe uma relação 1 a 1 entre regra de apreçamento livre de arbitragem e medidas martingais equivalentes. □

1.3 Completude de mercado e a unicidade da medida martingal equivalente

Para efeito de clareza do texto, trabalharemos com o caso particular (vetor bi-dimensional) do vetor de estratégias (d+1)-dimensional. Ressaltando que os resultados são aplicáveis de forma geral.

Definição 1.8 (Cobertura perfeita). *Uma estratégia auto-financiável $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)$ é dita uma estratégia de cobertura perfeita para um dado pagamento H se:*

$$H = H_T = V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t + \int_0^T \phi_t^0 dS_t^0, \text{ q.c. em } P.$$

Como estamos considerando ausência de arbitragem, se essa estratégia de cobertura perfeita existe, então V_0 (valor inicial do portfólio de cobertura) é único, já que duas estratégias com diferentes capitais iniciais poderiam levar a uma arbitragem.

Definição 1.9 (Completude de mercado). *Um mercado é dito completo se qualquer pagamento contingente admite uma estratégia de cobertura perfeita. Ou seja, para todo H existe uma estratégia auto-financiável ϕ tal que a equação de cobertura seja válida, q.c. com respeito à P .*

Como a medida P e a medida risco-neutra Q são equivalentes, se a equação de cobertura perfeita vale com probabilidade 1 em P ela também vale com probabilidade 1 em Q . Além disso, a esperança sob Q do valor descontado do pagamento H é dado por V_0 , ver Cont & Tankov (2004a). Portanto, como toda medida martingal equivalente Q precifica qualquer pagamento H da mesma forma ($E^Q[e^{-rT}H] = V_0$), temos indícios de que sob a hipótese de completude do mercado, ou seja sob a hipótese da existência de uma estratégia de cobertura perfeita para todo pagamento, existe uma única medida martingal Q equivalente à medida P . Este é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 1.2 (Segundo teorema fundamental do apreçamento de ativos). *Um mercado definido pelos ativos $(S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \in [0, T]}$ em $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ é completo se e somente se existe uma única medida martingal Q equivalente a P .*

Demonstração. Ver Shreve (2004), pag. 232. □

Mercado completo: qualquer pagamento H pode ser representado como o valor final de uma estratégia de cobertura perfeita auto-financiável.



Unicidade da medida martingal equivalente: existe uma única medida de probabilidade Q equivalente a P , tal que os valores descontados dos ativos são Q -martingais.

Capítulo 2

Processos de Lévy

Definição 2.1. Um processo de Lévy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico em \mathbb{R} definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ tal que:

1) X possui incrementos independentes. Ou seja, $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes para qualquer partição $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

2) X possui incrementos estacionários: a distribuição de $X_{t+h} - X_t$ é a mesma que a de $X_h - X_0, \forall t, h > 0$.

3) O seu caminho amostral é contínuo à direita com limite à esquerda (cadlag).

4) Para todo $\varepsilon > 0$ e $t > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0$.

Consideraremos neste trabalho processos de Lévy de atividade finita, ou seja na nossa modelagem admitiremos uma quantidade finita de saltos dado um intervalo finito.

Uma variável aleatória ξ é dita **infinitamente divisível** se para cada $n \geq 2$, existem n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,n}$ tais que:

$$\xi = \xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \dots + \xi_{n,n}, \text{ em distribuição.}$$

Observe que a distribuição do processo de Lévy X_t é infinitamente divisível já que:

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} (X_{(k+1)t/n} - X_{kt/n}),$$

e os incrementos $\{X_{(k+1)t/n} - X_{kt/n}\}, k = 0, \dots, n-1$ são i.i.d.

Teorema 2.1 (Fórmula de Lévy-Khintchine em \mathbb{R}). ξ é infinitamente divisível se e somente se:

$$E[\exp(i\mu\xi)] = \exp\left\{i\gamma\mu - \sigma^2\mu^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp\{i\mu\xi\} - 1 - i\mu\xi 1_{|\xi|<1})\nu(d\xi)\right\},$$

sendo $\sigma \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e ν é uma medida positiva em \mathbb{R} tal que:

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}} (|\xi|^2 \wedge 1) \nu(d\xi) < \infty.$$

Demonstração. ver Sato (1999). □

Observação: Como a finito-dimensional X_s de um processo de Lévy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é infinitamente divisível, sua função característica pode ser escrita da forma acima. Assim, podemos determinar sua distribuição através do trio característico $(\sigma_s, \gamma_s, \nu_s)$. Além disso, como X possui incrementos independentes e estacionários, pode-se provar que o seu trio característico no tempo t pode ser escrito como t vezes o seu trio característico no tempo 1. Portanto, se $(\sigma_1, \gamma_1, \nu_1)$ é o trio característico de X_1 , então $(\sigma_t, \gamma_t, \nu_t) = t(\sigma_1, \gamma_1, \nu_1)$. Chamamos o trio característico (σ, γ, ν) de X_1 de trio característico do processo de Lévy.

Observamos que cada elemento do trio característico possui significado próprio. A medida ν é chamada de medida de Lévy e representa a intensidade e o número esperado de saltos por unidade de tempo. O drift γ representa a tendência de evolução do processo na reta de coeficiente angular γ . E a volatilidade σ mede o grau de variabilidade do processo.

Os processos de Lévy mais simples utilizados em modelagens financeiras são: o movimento Browniano, o processo de Poisson e o processo de Poisson composto.

2.1 O Movimento Browniano

Definição 2.2 (Movimento Browniano). *Um processo estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ é dito um movimento Browniano se ele possuir:*

- 1) *Caminhos amostrais contínuos.*
- 2) *Incrementos independentes e estacionários.*
- 3) *Distribuição gaussiana da forma $B_t \sim N(0, t), \forall t \geq 0$.*

É claro da definição que o movimento Browniano é um processo de Lévy. Além disso, como sua função característica é $e^{-t^2/2}$, pela fórmula de Lévy-Khintchine deduzimos que o seu trio característico é $(1,0,0)$, ou seja, não há componente de salto. Sendo, portanto, um caso de processo de Lévy absolutamente contínuo.

Definição 2.3 (Filtração Browniana). *Seja $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ um espaço de probabilidade, no qual está definido um Movimento Browniano $B(t), t \geq 0$. Uma filtração Browniana é uma filtração $\mathfrak{S}_t, t \geq 0$, em (Ω, \mathfrak{S}) tal que:*

- 1) *A informação disponível no intervalo de tempo $[0, s]$ é suficiente para avaliar $B(s)$. Ou seja, o Browniano é um processo adaptado.*

2) Para $0 \leq t < u$, $B(u) - B(t)$ é independente de \mathfrak{F}_t (representa a independência dos incrementos futuros).

Proposição 2.1. O movimento Browniano é um Martingal com respeito a uma filtração Browniana.

Demonstração. Seja $0 \leq s \leq t$ dados. Temos que:

(i) Por definição, $B(t)$ possui distribuição Normal. Portanto, ele é integrável.

(ii) $E[B(t) \mid \mathfrak{F}_s] = E[(B(t)-B(s)) + B(s) \mid \mathfrak{F}_s] = E[B(t) - B(s)] + E[B(s) \mid \mathfrak{F}_s] = B(s)$. □

2.1.1 O Movimento Browniano Geométrico

Sejam $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ constantes. O Movimento Browniano Geométrico é definido por:

$$S(t) = S(0)\exp\{\sigma B(t) + \gamma t\}, t \geq 0,$$

onde $B(t)$ é um movimento Browniano.

Alguns dos modelos mais usados em finanças assumem que o logaritmo dos preços de um ativo $Z(t)$ segue um movimento Browniano com volatilidade $\sigma > 0$ e drift $\gamma \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\log(S(t)) = \sigma B(t) + \gamma t,$$

ou seja, $S(t)$ é o Movimento Browniano Geométrico.

Com isto queremos dizer que:

$$\log(S(t)) = Z(t),$$

onde $S(t)$ é o processo de preços.

Portanto, os log-retornos são independentes em intervalos disjuntos.

2.2 O Processo de Poisson

Definição 2.4 (Processo de Poisson). Um processo $\{N_t\}_{t \geq 0}$ é dito um processo de Poisson com intensidade $\lambda \geq 0$ se:

- 1) $N(0) = 0$.
- 2) O processo possui incrementos independentes.
- 3) $N(t + s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, $\forall s, t \geq 0$

Observação: Ao observar a fórmula de Lévy-Khintchine e a função característica do processo de Poisson percebemos que o seu trio característico é $(0, 0, \nu(x) = \lambda \delta_{x=1})$, sendo δ a medida de Dirac concentrada em $x=1$. Ela vale 1 se $x=1$ e vale 0 caso contrário.

2.2.1 Construção

Consideremos τ_1, τ_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de média λ^{-1} . O primeiro salto ocorre em τ_1 , o segundo ocorre em $\tau_1 + \tau_2$, o terceiro em $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, e assim sucessivamente. Definimos o tempo do n -ésimo salto por:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \tau_k.$$

Proposição 2.2. $\forall n \geq 1, S_n$ possui distribuição $\text{Gamma}(n, \lambda)$.

Demonstração. Aqui g_n denotará a densidade de S_n . Segue a prova por indução:

Para $n=1$, $S_1 = \tau_1$ é exponencialmente distribuído. Assim $g_1(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, $s \geq 0$. Agora iremos assumir que o caso é válido para S_n (ou seja, g_n é função de densidade de uma $\text{Gamma}(n, \lambda)$) e calcularemos a densidade de $S_{n+1} = S_n + \tau_{n+1}$:

Como S_n e τ_{n+1} são independentes podemos calcular a densidade de S_{n+1} através da seguinte convolução:

$$g_{n+1}(s) = \int_0^s g_n(v) * g_1(s-v) dv = \int_0^s (\lambda v)^{n-1} \lambda e^{-\lambda v} \lambda e^{-\lambda(s-v)} / (n-1)! dv =$$

$$\left\{ \lambda^{n+1} e^{-\lambda s} / (n-1)! \right\} \int_0^s v^{n-1} ds = (\lambda s)^n \lambda e^{-\lambda s} / n! .$$

□

Proposição 2.3. *Sejam τ_1, τ_2, \dots v.a's i.i.d. exponencialmente distribuídas com parâmetro λ . O processo $(N[t], t > 0)$ definido por:*

$$N_{[t]}(\omega) = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq S_n}(\omega), \omega \in \Omega,$$

é um processo de Poisson de intensidade λ .

Demonstração. Por definição e usando a proposição 2.2 obtemos:

$$P\{N[t] \geq k\} = P\{S_k \leq t\} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-1} / (k-1)! ds$$

Esta igualdade implica que:

$$P\{N[t] = k\} = P\{N[t] \geq k\} - P\{N[t] \geq k+1\} =$$

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-1} / (k-1)! ds - \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} (\lambda s)^k / (k)! ds = (\lambda t)^k e^{-\lambda t} / k! .$$

A prova da independência e estacionariedade dos incrementos do processo de Poisson estão presentes em Shreve (2004), teorema 11.2.3.

Portanto, $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. □

Definição 2.5. O Processo de Poisson Compensado é definido por:

$$M(t) = N(t) - \lambda t, t \geq 0,$$

sendo $N(t)$ um Processo de Poisson com intensidade λt .

Proposição 2.4. $(M(t))_{t \geq 0}$ é Martingal.

Demonstração. : Sejam $0 \leq s < t$ dados. Usaremos o fato de que $N[t] - N[s]$ é independente de $\mathfrak{F}[s]$ e possui média $\lambda(t-s)$. Assim,

$$\begin{aligned} E[M[t] | \mathfrak{F}[s]] &= E[M[t] - M[s] | \mathfrak{F}[s]] + E[M[s] | \mathfrak{F}[s]] = E[N[t] - N[s] - \lambda(t-s) | \mathfrak{F}[s]] + M[s] \\ &= E[N[t] - N[s] | \mathfrak{F}[s]] - \lambda(t-s) + M[s] \\ &= M[s]. \end{aligned} \quad \square$$

2.2.2 Processo de Poisson composto

Sejam $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade λ e Y_1, Y_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes entre si e de $N(t)$ e identicamente distribuídas, com distribuição μ . Definimos o Processo de Poisson composto como:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0. \quad (2.1)$$

Seja $X(t)$ o processo de Poisson composto definido acima. Sua função característica φ é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{X[t]}(u) &= E[\exp(iuX[t])] = E[\exp(iu \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i)] = \\ &= P\{N[t] = 0\} + \sum_{k=1}^{\infty} E[\exp\{iu \sum_{i=1}^k Y_i | N[t] = k\}] * P\{N[t] = k\} \\ &= P\{N[t] = 0\} + \sum_{k=1}^{\infty} E[\exp\{iu \sum_{i=1}^k Y_i\}] * P\{N[t] = k\} \end{aligned}$$

Pela independência dos Y_i obtemos:

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{\infty} E[\exp \{iuY_1\}] E[\exp \{iuY_2\}] \dots E[\exp \{iuY_k\}] \{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)/k!\} \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \{(\lambda t \varphi_Y(u))^k/k!\} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda t \varphi_Y(u))^k/k! = \exp\{ \lambda t(\varphi_Y(u) - 1) \}.
\end{aligned}$$

Para expressar o processo de Poisson composto como um caso particular de processo de Lévy, basta tomarmos o trio $(0, 0, \nu(x))$, com $\nu(x) = \lambda\mu(x)$.

Observação: (Processos de difusão com saltos) Combinando um Movimento Browniano com volatilidade σ e drift γ a um processo de Poisson Composto, obtemos o processo de Lévy chamado de processo de difusão com saltos:

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i. \quad (2.2)$$

Seu trio característico é dado por (σ, γ, ν) , onde $\nu = \nu(x)dx$ com $\nu(x) = \lambda\mu(x)$.

2.3 Medidas risco-neutras e processos de Lévy

Vimos na seção 1.2 a importância das medidas risco-neutras (martingais e equivalentes) para definirmos um mercado livre de arbitragem. As proposições a seguir contêm condições para que medidas, cujas distribuições são provenientes de processos de Lévy, sejam equivalentes.

Relembremos que se P e Q são medidas de probabilidades equivalentes, então, pelo teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym ver Rudin (1974), existe uma variável aleatória positiva Z , denominada densidade de Q com respeito a P e denotada por (dQ/dP) tal que:

$$E^Q[X] = E^P\{X(dQ/dP)\}, \forall \text{ v.a. } X.$$

Proposição 2.5 (Equivalência de medidas para processos de Poisson compostos). *Sejam (X,P) e (X,Q) processos de Poisson compostos definidos em (Ω, \mathfrak{F}_T) com medidas de Lévy ν^P e ν^Q , respectivamente. P e Q são equivalentes se e somente se ν^P e ν^Q são equivalentes. Nesse caso, a derivada de Radon-Nikodym (dQ/dP) é dada por:*

$$D_T = dQ/dP = \exp \left(T(\lambda^P - \lambda^Q) + \sum_{s \leq T} \phi(\Delta X_s) \right),$$

sendo $\lambda^P \equiv \nu^P$ e $\lambda^Q \equiv \nu^Q$ que representam a intensidade do salto dos dois processos e $\phi \equiv \ln(d\nu^Q / d\nu^P)$.

Demonstração. (\Rightarrow). Suponha ν^P e ν^Q equivalentes. Condicionando a trajetória de X no número de saltos em $[0, T]$, obtemos:

$$\begin{aligned}
E^P[D_T] &= E^P[\exp (T(\lambda^P - \lambda^Q) + \sum_{s \leq T} \phi(\Delta X_s))] = \\
&= e^{-\lambda^Q T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^P T)^k}{k!} E^P \{ e^{\phi(\Delta X)} \}^k = 1.
\end{aligned}$$

Agora basta mostrar que se X é um processo de Poisson composto em P com medida ν^P então ele é um processo de Poisson composto sob Q com medida ν^Q . Sejam f e g duas funções limitadas e mensuráveis e consideremos $s < t < T$. Usando o fato de que X e $\log(D)$ são processos de Lévy e de que D é martingal sob P , obtemos:

$$\begin{aligned}
E^Q[f(X_s) - g(X_t - X_s)] &= E^P[f(X_s)D_s]E^P[g(X_t - X_s)\frac{D_t}{D_s}] = \\
&= E^P[f(X_s)D_s]E^P[g(X_t - X_s)D_t] = E^Q[f(X_s)]E^Q[g(X_t - X_s)].
\end{aligned}$$

Isto prova que os incrementos em Q são independentes. Condiçãoando novamente a trajetória de X sob o número de saltos obtemos:

$$\begin{aligned}
E^P[\exp(iuX_T)\exp (T(\lambda^P - \lambda^Q) + \sum_{s \leq T} \phi(\Delta X_s))] &= \\
&= e^{-\lambda^Q T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^P T)^k}{k!} E^P \{ e^{iu\Delta X + \phi(\Delta X)} \}^k \\
&= \exp(T \int (e^{iux} - 1)\nu^Q(dx)).
\end{aligned}$$

(\Leftarrow). Suponha que ν^Q e ν^P não sejam equivalentes. Então existe um conjunto B tal que $\nu^P(B) > 0$ e $\nu^Q(B) = 0$. Então o conjunto de trajetórias com pelo menos 1 salto cujo tamanho pertence a B tem probabilidade positiva em P e probabilidade 0 em Q , o que mostra que essas duas medidas não são equivalentes. \square

Proposição 2.6 (Equivalência de medidas para o movimento Browniano com drift). *Sejam (X,P) e (X,Q) dois movimentos Brownianos definidos em (Ω, \mathfrak{S}_T) com volatilidades σ^P e σ^Q e drifts μ^P e μ^Q , respectivamente. P e Q são equivalentes se $\sigma^P = \sigma^Q$. Nesse caso, a derivada de Radon-Nikodym (dQ/dP) é dada por:*

$$D_T = dQ/dP = \exp \{ X_T(\mu^Q - \mu^P)/\sigma^2 - T((\mu^Q)^2 - (\mu^P)^2)/2\sigma^2 \}.$$

O resultado acima pode também ser expresso como o seguinte martingal exponencial:

$$D_T = dQ/dP = \exp \{ B_T(\mu^Q - \mu^P)/\sigma^2 - T(\mu^Q - \mu^P)^2/2\sigma^2 \},$$

sendo $B_t = (X_t - \mu^P t)/\sigma$ um movimento browniano padrão sob P .

Demonstração. Esta proposição é uma consequência do teorema de Gyrsanov, cuja prova se encontra em Shreve (2004) pág. 210. \square

Proposição 2.7. [Equivalência de medidas para processos de Lévy (caso geral)] Sejam P e Q distribuições de processos de Lévy em (Ω, \mathfrak{S}) com trios característicos $(\sigma_P, \nu_P, \gamma_P)$ e $(\sigma_Q, \nu_Q, \gamma_Q)$ respectivamente, e com $(\sigma_P \neq 0)$. Então, P e Q são medidas equivalentes se e somente se:

(i) $\sigma_P = \sigma_Q$

(ii) As medidas de Lévy ν_P e ν_Q são equivalentes e obedecem a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\exp\{\phi(x)/2\} - 1)\nu_P(dx) < \infty,$$

sendo $\phi(x) = \log(d\nu_Q/d\nu_P)$.

Demonstração. Sato (1999) pag. 218 □

O resultado da proposição 2.7 nos fornece condições, dentro da classe das distribuições de Lévy, para que Q seja equivalente à P . Pelo primeiro teorema fundamental do apareamento, precisamos que Q seja medida martingal, ou seja que \hat{S}_t seja martingal sob Q . Abaixo, seguemos as condições para que isto ocorra considerando em (i) $S_t = S_0 X_t$ e em (ii) $S_t = S_0 e^{X_t}$.

Proposição 2.8. [Condições para que a distribuição de um processo de Lévy seja uma medida martingal] Seja $(X_t)_{t>0}$ um processo de Lévy em \mathbb{R} com trio característico (σ, ν, γ) .

(i) (X_t) é martingal se e somente se:

$$\int_{|x|\geq 1} |x|\nu(dx) < \infty \text{ e } \gamma + \int_{|x|\geq 1} x\nu(dx) = 0.$$

(ii) $\exp(X_t)$ é martingal se e somente se:

$$\sigma^2/2 + \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(x) - 1 - x1_{|x|\geq 1})\nu(dx) = 0 \text{ e } \int_{|x|\geq 1} e^x\nu(dx) < \infty.$$

Demonstração. Esta proposição é consequência da proposição 3.17 pág. 97 apresentada em Cont & Tankov (2004a). □

Definiremos a seguir a Entropia Relativa. Ela nos fornece uma espécie de distância entre medidas e será importante na regularização do problema de calibração apresentado no capítulo 4.

Definição 2.6 (Entropia Relativa). Sejam \mathbf{P} e \mathbf{Q} duas medidas de probabilidade tal que \mathbf{Q} é absolutamente contínua com respeito à \mathbf{P} em (Ω, \mathfrak{S}) . A entropia relativa de \mathbf{Q} com respeito a \mathbf{P} é definida como:

$$\xi(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) = E^{\mathbf{Q}}[\ln(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P})] = E^{\mathbf{P}}[(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P})\ln(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P})] \tag{2.3}$$

Proposição 2.9 (Entropia Relativa para processos de Lévy). *Sejam P e Q medidas equivalentes em (Ω, \mathfrak{S}) geradas por modelos exponenciais de Lévy com trios característicos $(\sigma^2, \gamma^P, \nu^P)$ e $(\sigma^2, \gamma^Q, \nu^Q)$ no intervalo de tempo $[0, T]$. Neste caso, a entropia relativa é dada por:*

$$\begin{aligned} \xi(Q|P) &= (T/2\sigma^2)\{\gamma^Q - \gamma^P - \int_{-1}^1 x(\nu^Q - \nu^P)dx\}^2 + \\ &+ T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \log\left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P}\right) + 1 - \frac{d\nu^Q}{d\nu^P}\right) \nu^P(dx). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pela condição de risco-neutralidade, essa equação se reduz a:

$$\xi(Q|P) = \frac{T}{2\sigma^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)(\nu^Q - \nu^P) dx \right\}^2 + T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \log\left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P}\right) + 1 - \frac{d\nu^Q}{d\nu^P}\right) \nu^P(dx). \quad (2.5)$$

Demonstração. Considere o processo de preços dado pela exponencial de um processo de Lévy. Pela bijetividade da função exponencial, as filtrações geradas por X_t e por S_t coincidem. Portanto, é equivalente calcular a entropia relativa do logaritmo dos preços (que são processos de Lévy). Para calcularmos a entropia relativa entre dois processos de Lévy, usaremos a seguinte expressão (já apresentada):

$$\xi(Q|P) = \int \left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \log \left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \right) \right) dP = E^P[Ue^U], U = \log\left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P}\right) \quad (2.6)$$

A proposição 2.7 estabelece condições para que duas medidas sejam equivalentes para o caso geral de processos de Lévy. A expressão para a derivada de Radon-Nikodym, o que envolve a expressão para U , pode ser vista em Sato (1999). Como U é função do processo de Lévy X_T , ver Sato (1999), ele também é processo de Lévy, assim denotaremos seu trio característico por (a^U, γ^U, ν^U) .

Consideremos $\phi_t(z)$ sua função característica e $\psi(z)$ o expoente da função característica, ou seja:

$$\phi_t(z) = E^P[e^{izU_t}] = e^{t\psi(z)}. \quad (2.7)$$

Portanto, podemos escrever:

$$E^P[U_T e^{U_T}] = -i \frac{d}{dz} \phi_T(-i) = -iT e^{T\psi(-i)} \psi'(-i) = \quad (2.8)$$

$$= -iT \psi'(-i) E^P[e^{U_T}] = -iT \psi'(-i). \quad (2.9)$$

Pela fórmula de Lévy-Khintchine, sabemos que:

$$\psi'(z) = -a^U z + i\gamma^U + \int_{-\infty}^{\infty} (ixe^{izx} - ix1_{|x|\leq 1}) \nu^U dx. \quad (2.10)$$

Podemos, portanto, calcular a entropia relativa da seguinte forma:

$$\xi = a^U T + \gamma^U T + T \int_{-\infty}^{\infty} (xe^x - x1_{|x|\leq 1}) \nu^U dx = \quad (2.11)$$

$$= \frac{\sigma^2 T \eta^2}{2} + T \int (ye^y - e^y + 1)(\nu^P \phi^{-1})(dy) = \quad (2.12)$$

$$= \frac{\sigma^2 T \eta^2}{2} + T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \log \left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \right) + 1 - \frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \right) \nu^P(dx), \quad (2.13)$$

sendo η escolhido de forma que:

$$\gamma^Q - \gamma^P - \int_{-1}^1 x(\nu^Q - \nu^P)(dx) = \sigma^2 \eta. \quad (2.14)$$

Como assumimos que o coeficiente de volatilidade σ é maior que zero, podemos escrever:

$$\frac{1}{2\sigma^2} [\gamma^Q - \gamma^P - \int_{-1}^1 x(\nu^Q - \nu^P)(dx)]^2 = \frac{\sigma^2 \eta^2}{2}. \quad (2.15)$$

Se P e Q forem medidas martingais, podemos expressar a equação acima como:

$$\frac{1}{2\sigma^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)(\nu^Q - \nu^P)(dx) \right]^2 = \frac{\sigma^2 \eta^2}{2}. \quad (2.16)$$

□

2.4 Discussão sobre incompletude do mercado em modelos de difusão com saltos

Consideremos $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade onde estão definidos um Movimento Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ e M processos de Poisson independentes N_1, N_2, \dots, N_M no intervalo $[0, T]$. Seja $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ a filtração gerada pelo Browniano e pelos processos de Poisson.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ as intensidades dos processos de Poisson e consideremos números reais $y_1 < y_2 < \dots < y_M$ tais que:

$$N(t) = \sum_{m=1}^M N_m(t) \text{ e } X(t) = \sum_{m=1}^M y_m N_m(t).$$

Note que N é um processo de Poisson com intensidade $\lambda = \sum_{m=1}^M \lambda_m$ e X é um processo de Poisson composto.

Seja Y_i a variável aleatória que denota o tamanho do i-ésimo salto do processo de Poisson composto. Pode-se provar que $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de v.a's i.i.d. tomando valores em $\{y_1, y_2, \dots, y_M\}$ com $P(Y_i = y_m) = p(y_m) = \frac{\lambda_m}{\lambda}$. Assim, X(t) pode ser reescrito como:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

Defina

$$\beta_i = E[Y_i] = \sum_{m=1}^M y_m p(Y_i = y_m) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^M \lambda_m y_m.$$

Consideraremos um ativo do mercado S seguindo um processo de difusão com saltos que é solução da equação diferencial estocástica:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dB(t) + S(t-)d(X(t) - \beta\lambda t). \quad (2.17)$$

Teorema 2.2. *A solução da equação 2.17 é dada por:*

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma B_t + \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \prod_{i=1}^{N(t)} (Y_i + 1). \quad (2.18)$$

Demonstração. A demonstração deste fato pode ser vista em Shreve (2004). □

Sob a medida de probabilidade P, a taxa média de retorno do ativo é α . Assumimos $y_i > -1$ para que os saltos no preço do ativo não faça com que ele assuma um valor negativo ou zero, veja o Teorema 2.2. Consideraremos o valor inicial do ativo é $S(0) > 0$.

Construiremos uma medida risco-neutra Q, considerando:

$$Z_0(t) = \exp \left\{ -\theta B_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}, \theta \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

$$Z_m(t) = e^{(\lambda_m - \lambda_m^Q)t} \left(\frac{\lambda_m^Q}{\lambda_m} \right)^{N_m(t)}, \lambda_m^Q \in \mathbb{R}^+, m = 1, 2, \dots, M. \quad (2.20)$$

$$Z(t) = Z_0(t) \prod_{m=1}^M Z_m(t) \quad (2.21)$$

$$Q(A) = \int_A Z(T) dP, \forall A \in \mathfrak{S}.$$

Observe que $P(Z > 0 = 1)$, logo P e Q são equivalentes. Assim, sob Q as seguintes propriedades são válidas:

1. $B^Q(t) = B(t) + \theta t$ é um movimento Browniano
2. N_m , $m = 1, 2, \dots, M$ são processos de Poisson com intensidade λ_m^Q
3. $B^Q(t)$ e N_1, N_2, \dots, N_M são independentes entre si.

Definiremos: $\lambda^Q = \sum_{m=1}^M \lambda_m^Q$. Sob Q, $N(t) = \sum_{m=1}^M N_m(t)$ é um processo de Poisson com intensidade λ^Q e as v.a.'s que representam os tamanhos dos saltos Y_1, Y_2, \dots, Y_m são i.i.d's com $Q(Y_i = y_m) = \frac{\lambda_m^Q}{\lambda^Q}$. Além disso, o processo de Poisson composto descontado $X(t) - \beta^Q \lambda^Q t$ é martingal, sendo:

$$\beta^Q = E^Q[Y_i] = \sum_{m=1}^M y_m Q(Y_i = y_m) = \frac{1}{\lambda^Q} \sum_{m=1}^M \lambda_m^Q y_m.$$

Pela fórmula de apreçamento risco-neutra, para que Q seja medida risco-neutra precisamos que a taxa média de retorno do ativo sob Q seja r . Ou seja, precisamos que a seguinte igualdade seja satisfeita:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dB(t) + S(t-)d(X(t) - \beta\lambda t) = \\ &= rS(t)dt + \sigma S(t)dB^Q(t) + S(t-)d(X(t) - \beta^Q\lambda^Q t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

E isto equivale a:

$$\alpha - \beta\lambda = r + \sigma\theta - \beta^Q\lambda^Q \quad (2.23)$$

Podemos reescrever esta equação como:

$$\alpha - r = \sigma\theta + \sum_{i=1}^M (\lambda_m - \lambda_m^Q)y_m \quad (2.24)$$

Como pode ser observado, existem $M+1$ variáveis desconhecidas $\theta, \lambda_1^Q, \dots, \lambda_M^Q$ e apenas uma equação. Isso nos dá a possibilidade de especificar diversas medidas risco-neutras. Consideraremos mais ativos para que possamos determinar uma única medida risco-neutra precificadora, ou seja investigaremos condições para que o mercado seja completo.

2.4.1 Três ativos e dois processos de Poisson

Consideremos um movimento Browniano B_t e dois processos de Poisson N_1 e N_2 independentes entre si. Sejam $\{X_i\}_{i=\{1,2,3\}}$ três processos de Poisson compostos da forma:

$$X_i(t) = y_{i,1}N_1(t) + y_{i,2}N_2(t), i = 1, 2, 3 \quad (2.25)$$

sendo $y_{i,m} > -1, i = 1, 2, 3$ e $m = 1, 2$. Neste caso, teremos:

$$\beta_i = \frac{1}{\lambda} (\lambda_1 y_{i,1} + \lambda_2 y_{i,2}), i = 1, 2, 3.$$

sendo λ_1 e λ_2 as intensidades de N_1 e N_2 sob a medida de probabilidade P .

Consideraremos que os ativos S_1, S_2, S_3 seguem o seguinte processo de difusão com saltos:

$$dS_i(t) = \alpha_i S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dB(t) + S_i(t-)d(X_i(t) - \beta_i\lambda t).$$

Novamente, para que Q seja medida martingal, precisamos que a taxa média de retorno dos ativos seja r . Isto nos leva as seguintes equações:

$$\alpha_1 - r = \sigma_1 \theta + \sum_{i=1}^M (\lambda_1 - \lambda_1^Q) y_{1,1} + \sum_{i=1}^M (\lambda_2 - \lambda_2^Q) y_{1,2} \quad (2.26)$$

$$\alpha_2 - r = \sigma_2 \theta + \sum_{i=1}^M (\lambda_1 - \lambda_1^Q) y_{2,1} + \sum_{i=1}^M (\lambda_2 - \lambda_2^Q) y_{2,2} \quad (2.27)$$

$$\alpha_3 - r = \sigma_3 \theta + \sum_{i=1}^M (\lambda_1 - \lambda_1^Q) y_{3,1} + \sum_{i=1}^M (\lambda_2 - \lambda_2^Q) y_{3,2} \quad (2.28)$$

Obtivemos então um sistema de equações com 3 equações e três incógnitas $(\theta, \lambda_1^Q, \lambda_2^Q)$. Portanto, se conseguirmos uma solução explícita, ela definirá uma única medida risco-neutra. Neste caso, o mercado é considerado livre de arbitragem e completo.

Em particular, se existem M possíveis tamanhos de saltos, existem $M-1$ formas de se associar pesos às probabilidades de tamanho de salto. Para que o mercado seja completo, devem existir um ativo livre de risco e uma quantidade de ativos igual ao número de incertezas do mercado, sendo que cada possível tamanho de salto conta como uma fonte de incerteza. Se existir uma quantidade muito grande de possíveis tamanhos de saltos, uma quantidade muito grande de ativos será necessária para que o mercado seja completo.

Por isso, em geral, considera-se que mercados cujos ativos seguem um processo de difusão com saltos são incompletos, e, portanto, existem diversas medidas risco-neutras possíveis no modelo.

Na prática, nós consideraremos uma classe de processos e então calibraremos os parâmetros usando preços de contratos de mercado. Assim, poderemos determinar a medida Q e como consequência escolher estratégias de cobertura adequadas segundo a regra de apreçamento adotada. Estratégias de cobertura serão discutidas no capítulo 3.

Sintetizando

Enquanto vários modelos estocásticos satisfazem a hipótese de ausência de arbitragem, poucos satisfazem a de completude do mercado. Modelos de difusão com saltos e modelos Lévy-exponenciais estão na categoria de mercados incompletos. Ou seja, quando o processo de preços segue, por exemplo, um processo de difusão com saltos, não é possível, em regra, efetuar cobertura perfeita para todo pagamento H .

Como discutido, para conseguirmos efetuar a cobertura perfeita precisamos de um ativo livre de risco e de uma quantidade de ativos igual ao número de possíveis tamanhos de saltos. Mas como usualmente não se sabe o tamanho exato dos saltos, os riscos a eles associados não podem ser totalmente eliminados. Falhando aí a possibilidade de cobertura perfeita e como consequência imediata a completude de mercado.

A suposição de ausência de arbitragem nos trouxe à garantia da existência de pelo menos uma medida risco-neutra equivalente Q sob a qual os preços descontados são martingais. Ela corresponde a uma regra de apreçamento para qualquer pagamento H . Entretanto, em modelos de Lévy, em regra, essa medida risco-neutra não é única,

o que torna possível apreçar os pagamentos de diversas formas e como consequência adotar formas distintas de cobertura (com erro) para um determinado pagamento. Isto é consequência do segundo teorema fundamental da apreçamento pois, pelas proposições 2.7 e 2.8 pode-se ver que existem diversas medidas martingais equivalentes precificadoras.

Então qual medida martingal Q escolher? E segundo qual critério iremos fazer essa escolha? Em Cont & Tankov (2004a) os autores expõem diversos critérios para a escolha desta medida. Eles serão descritos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Estratégias de cobertura em modelos de Lévy exponenciais

3.1 Cobertura Delta de Merton

Estudaremos o efeito da estratégia de cobertura chamada de *Cobertura Delta* em portfólios cujos ativos admitem salto. Essa estratégia foi proposta em Merton (1976) e também pode ser vista em Shreve (2004).

Merton considerou o comportamento dos preços no mercado de acordo com o seguinte processo de difusão com saltos:

$$S_t = S_0 \exp \left[\mu t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right],$$

sendo $Y_i \sim N(0, \delta^2)$ i.i.d., B_t um movimento browniano e N_t um processo de Poisson com intensidade λ , todos independentes entre si em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

A medida martingal equivalente precificadora Q é obtida através de uma mudança do drift de S_t , ou seja, sob Q :

$$\hat{S}_t = S_0 \exp \left[\mu_Q t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right], \text{ para } \mu_Q \in \mathbb{R},$$

Para garantir que \hat{S}_t seja martingal sob Q devemos ter, ver proposição 2.8:

$$\mu_Q = r - \sigma^2/2 - \lambda E[\exp(Y_i) - 1].$$

Suponhamos que o nosso portfólio de cobertura tenha valor inicial $V(0) = c(0, S(0))$, sendo $c(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S(T) - K)^+ | S(t) = S]$ o preço da opção de compra europeia no instante t , como em Cont & Tankov (2004a). Pode-se provar que a função $c(t, x)$ é convexa com respeito a x .

Como já discutido, uma estratégia de cobertura consiste em manter o preço do portfólio de cobertura igual ao preço do contrato, neste caso o preço da opção de compra européia, para todo $t \in [0, T]$.

Em Shreve (2004), o autor obtém esta igualdade analisando as derivadas do preço da opção e do preço do portfólio de cobertura.

Seja $V(t)$ o valor do portfólio no tempo t associado a uma estratégia auto-financiável ϕ como na definição 1.5. Desenvolvemos a seguir a forma da derivada do valor descontado de um portfólio de cobertura cuja estratégia consiste em manter $\phi(t)$ ações no tempo t e o restante no ativo livre de risco.

$$dV(t) = \phi(t-)dS(t) + r(V(t) - \phi(t)S(t))dt. \quad (3.1)$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}V(t)) &= e^{-rt}[-rV(t)dt + dV(t)] = e^{-rt}[\phi(t-)dS(t) - r\phi(t)S(t)dt] \\ &= e^{-rt}[\phi(t)\sigma S(t)dB^Q(t) + \phi(t-)S(t-)d(X(t) - \beta^Q\lambda t)] \\ &= e^{-rt}[\phi(t)\sigma S(t)dB^Q(t) + \phi(t-)S(t-) \sum_{m=1}^M y_m(dN_m(t) - \lambda_m^Q dt)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A estratégia de cobertura *Delta* consiste em manter no tempo t a quantidade de ativos $\phi(t) = c_x(t, S(t))$. Ela nos proporciona a cobertura perfeita quando os ativos seguem processos de difusão, ou seja, como no modelo clássico de Black e Scholes, ver Shreve (2004).

No entanto, em processos de difusão com saltos, a derivada da diferença entre o valor descontado da opção e o valor descontado do portfólio de cobertura que segue a estratégia de cobertura *Delta*

$$d(e^{-rt}c(t, S(t)) - e^{-rt}V(t))$$

é igual a

$$\sum_{m=1}^M [e^{-rt}(c(t, (y_m + 1)S(t-)) - c(t, S(t-)) - y_m S(t-)c_x(t, S(t-)))(dN_m(t) - \lambda_m^Q dt)]. \quad (3.3)$$

Como a função $c(t,x)$ é convexa com respeito a x . Isso nos garante que:

$$c(t, x_2) - c(t, x_1) > (x_2 - x_1)c_x(t, x_1).$$

Ou seja,

$$c(t, (y_m + 1)S(t-)) - c(t, S(t-)) > y_m S(t-)c_x(t, S(t-)). \quad (3.4)$$

Como descrito em Shreve (2004), isso significa que, entre os saltos, o valor do portfólio de cobertura é maior que o da opção. No entanto, nos exatos instantes dos saltos o valor da opção é maior do que o valor do portfólio.

Podemos observar que, como $e^{-rt}c(t, S(t))$ e $e^{-rt}V(t)$ são martingais, sua diferença também é martingal o que nos fornece que a diferença entre o preço da opção e o portfólio de cobertura possui esperança sob Q igual a zero. Daí conclui-se que, em média, a cobertura *Delta* cobre a opção corretamente.

Como pode ser observado, a escolha de Merton para a medida martingal equivalente manteve intactas as componentes de salto. Ela apenas altera o drift e isso implica que a estratégia de cobertura apenas cobre o risco proveniente do processo de difusão. Quanto aos riscos de salto, esta estratégia apenas corrige o efeito da média dos saltos deixando o portfólio completamente exposto aos riscos de saltos individuais. Isto nos motiva a procurar por outras formas de escolher medidas precificadoras Q e por novas estratégias de cobertura que supram a necessidade de proteção a este tipo de risco. Discutiremos, brevemente, a seguir outras estratégias de cobertura como supercobertura, maximização da função de utilidade e cobertura quadrática. Elas podem ser vistas em Cont & Tankov (2004a).

3.2 Supercobertura

Como já discutido no contexto de mercados incompletos, não é possível encontrar uma estratégia auto-financiável ϕ que replique com exatidão todo pagamento H do mercado. Uma abordagem conservadora consideraria o conjunto de estratégias que, com probabilidade 1, garante que o valor do portfólio no tempo T seja superior ao valor do pagamento H , ou seja:

$$P\left(V_T(\phi) = V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t \geq H\right) = 1.$$

Uma estratégia, satisfazendo a igualdade acima, é chamada de Supercobertura. O custo desta estratégia é o próprio capital inicial V_0 , já que $E^Q\left[\int_0^T \phi_t d\hat{S}_t\right] = 0$ (considerando \hat{S} martingal e ϕ limitada). O custo da estratégia de Supercobertura mais barata é chamado de custo da Supercobertura:

$$\Pi^{sup}(H) = \inf\left\{V_0 : \exists \phi, P\left(V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t \geq H\right) = 1\right\}.$$

Esse custo é interpretado como o custo para se eliminar todo risco associado ao pagamento. Por exemplo, considerando um investidor com uma posição vendida em uma opção de compra, o custo da Supercobertura é o custo para eliminar, com probabilidade 1, os riscos da opção.

A proposição a seguir nos dá o alcance dos preços no caso do modelo de difusão com saltos.

Proposição 3.1 (Supercobertura para pagamentos de opções européias em modelos de Lévy exponenciais). *Considere um modelo definido por $S_t = S_0 \exp(X_t)$, sendo X um processo de Lévy em $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$.*

(i) *Seja X é um processo de Lévy com $\sigma = 0$, saltos negativos de tamanho arbitrário e uma medida de Lévy obedecendo a $\int_{|x| < 1} v(dx) = \infty$. Para uma opção de compra européia, o intervalo de preços é dado por:*

$$[\inf_Q E^Q[(S_T - K)^+] , \sup_Q E^Q[(S_T - K)^+]],$$

que é igual a:

$$[(S_0 e^{rT} - K)^+ , S_0],$$

(ii) *Se X é um processo de difusão com saltos com coeficiente de difusão σ e com saltos que seguem um processo de Poisson Composto, então os preços de uma opção de compra européia devem estar contidos no seguinte intervalo:*

$$[C^{BS}(0, S_0, T, K, \sigma), S_0],$$

sendo $C^{BS}(0, S_0, T, K, \sigma)$ o valor da opção de compra no modelo de Black and Scholes com volatilidade σ .

Demonstração. (i) Ver Eberlein & Jacod (1997). (ii) Ver Bellamy & Jeanblanc (1999) \square

Como observado em Cont & Tankov (2004a), o preço da SuperCobertura é muito alto até mesmo para a opção de compra européia já que este método possui estratégias de cobertura muito conservadoras: ele considera o conjunto de estratégias cujo risco de perda é zero. O alto custo de sua obtenção nos leva à conclusão de que a estratégia de SuperCobertura não é uma boa estratégia em modelos de difusão com saltos: o investidor deve aceitar algum risco para que o custo da cobertura alcance um nível viável. No entanto, uma característica positiva a se ressaltar é que, para uma carteira de contratos de opções, a Supercobertura da carteira é mais barata do que a soma das Supercoberturas individuais, este fato é devido à não-linearidade e torna esta estratégia considerável para gestores de carteiras com múltiplos contratos.

3.3 Maximização da Utilidade

Partindo da insatisfação do investidor com os resultados da SuperCobertura, estudaremos o método de Maximização da Utilidade que, contrário à SuperCobertura, leva em consideração as probabilidades de cada cenário de perda e minimiza a média ponderada das perdas. Este método, tradicionalmente utilizado na teoria de escolha sob incerteza, é formalizado utilizando-se a noção de utilidade esperada (para mais detalhes, ver Föllmer & Schied (2002)): um investidor em um cenário de incerteza escolherá, entre estratégias auto-financeáveis, àquela que obedece ao critério:

$$\sup_{\phi} E^P[U(V_T)],$$

sendo $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava e crescente chamada de função de utilidade do investidor e V_T o valor do portfólio no tempo T descrito na definição 1.5.

A concavidade da função U é relacionada a aversão ao risco do investidor. Um exemplo típico de função de utilidade é a função de utilidade exponencial dada por $U^\alpha(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$, sendo $\alpha > 0$ o coeficiente de aversão ao risco do investidor. Esta função de utilidade é importante pela possibilidade da obtenção de expressões analíticas para o cálculo de sua esperança, ver Aguiar (2004).

Consideremos um investidor com um capital inicial V_0 e com uma função de utilidade U . Se o investidor segue uma estratégia auto-financiável $\{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$, o valor final do portfólio, seguindo a definição 1.6, é dado por:

$$V_T(\phi) = V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t.$$

Assim, um investidor que maximiza sua utilidade optará pela estratégia ϕ que maximiza o valor final de seu portfólio, ou seja:

$$\sup_{\phi} E^P \left[U(V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t) \right].$$

A idéia deste método é maximizar a utilidade de portfólios associados a estratégias auto-financiáveis. Utilizando o método da Maximização da Utilidade, um investidor com capital inicial V_0 que compra uma opção com pagamento final H pelo preço π e a segura até o tempo final T , optará pela seguinte estratégia auto-financiável ϕ :

$$\sup_{\phi} E^P \left[U(V_0 - \pi + H + \int_0^T \phi_t dS_t) \right].$$

Igualando essas duas equações podemos avaliar qual preço π torna indiferente a compra da opção com pagamento final H . Este preço é chamado de preço de indiferença e pode ser visto com detalhes em Hodges & Neuberger (1989).

Pode-se provar que o preço de indiferença não é linear, ou seja:

$$\pi_U(V_0, \lambda H) \neq \lambda \pi_U(V_0, H) \text{ e } \pi_U(V_0, H_1 + H_2) \neq \pi_U(V_0, H_1) + \pi_U(V_0, H_2).$$

Além disso, em regra o preço de indiferença depende do capital inicial do investidor. Uma outra característica a se observar é que em geral comprar e vender não são operações simétricas já que a função de utilidade pondera ganhos e perdas de formas distintas. No entanto, para uma função de utilidade específica ($U(x) = -x^2$), nós obtemos uma regra de apreçamento linear. Este é exatamente o caso da cobertura quadrática.

Observação: Como ressaltado em Karatzas & Shreve (1999) existe uma relação direta entre o modelo de apreçamento CAPM e a função de utilidade quadrática.

3.4 Cobertura Quadrática Média-Variância

A cobertura quadrática média-variância é definida como a estratégia de cobertura que minimiza o erro segundo mínimos quadrados. Diferentemente do caso da maximização da utilidade, perdas e ganhos são operações simétricas. Procuraremos por estratégias auto-financeáveis (ϕ_t^0, ϕ_t) com capital inicial V_0 que minimize o erro de cobertura na maturidade ($t=T$) segundo o cálculo de mínimos quadrados:

$$\inf_{\phi} E[|V_T(\phi) - H|^2], \text{ com } V_T(\phi) = V_0 + \int_0^T r\phi_t^0 dS_t + \int_0^T \phi_t d\hat{S}_t.$$

Esta esperança é tomada de acordo com uma medida de probabilidade que nós temos que especificar. Vamos assumir que esta é a medida risco-neutra Q . Como \hat{S}_t é martingal sob Q , o problema se reduz a:

$$\inf_{V_0, \phi} E[|\epsilon(V_0, \phi)|^2], \text{ com } \epsilon(V_0, \phi) = \hat{H} - \hat{V}_T = \hat{H} - V_0 - \int_0^T \phi_t d\hat{S}_t.$$

Considere um mercado cujos log-preços são regidos pela expressão: $Z_t = \log(S_t) = rt + X_t$, sendo X_t um processo de Lévy em $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, Q)$.

Proposição 3.2 (Cobertura quadrática em modelos de Lévy exponenciais). *Considere o modelo risco-neutro:*

$$Q: d\hat{S}_t = \hat{S}_{t-} dZ_t,$$

sendo Z um processo de Lévy com medida de Lévy ν_z e coeficiente de difusão $\sigma > 0$.

Para uma opção europeia com pagamento $H(S_T)$ com H sendo uma função Lipchitz, ou seja:

$$\exists K > 0, |H(x) - H(y)| \leq K|x - y|,$$

a estratégia que minimiza o risco quadrático é dada por:

$$\phi_t = \Delta(t, S_{t-}) = \frac{\sigma^2 \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}) + \frac{1}{S_{t-}} \int \nu_Z(dy) z [C(t, S_{t-}(1+z)) - C(t, S_{t-})]}{\sigma^2 + \int z^2 \nu_Z(dy)}, \quad (3.5)$$

com $C(t, S) = e^{-r(T-t)} E^Q[H(S_T) | S_T = S]$.

Demonstração. Esta prova pode ser vista em detalhes em Cont & Tankov (2004a). Sob a medida risco-neutra Q , \hat{S}_t é martingal. Considere uma estratégia auto-financeável (ϕ_t^0, ϕ_t) , o valor descontado do portfólio de cobertura é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{V}_T &= \int_0^T \phi_t d\hat{S}_t = \int_0^T \phi_t \hat{S}_{t-} dZ_t \\ &= \int_0^T \phi_t \hat{S}_t \sigma_t dB_t + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_t \hat{S}_t z J_Z(dtdz). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por construção, $\hat{C}(t, S) = e^{-rT} C(t, S)$ é um martingal quadrado integrável, e, portanto, a fórmula de Itô pode ser aplicada a $\hat{C}(t, S)$ entre 0 e t :

$$\begin{aligned}
& \hat{C}(t, S_t) - \hat{C}(0, S_0) = \\
& \int_0^t \frac{\partial C}{\partial S}(u, S_{u-}) \hat{S}_{u-} \sigma_t dB_u + \int [C(u, S_{u-}(1+z)) - C(u, S_{u-})] J_Z(dudz) = \\
& = \int_0^t \frac{\partial C}{\partial S}(u, S_{u-}) \hat{S}_{u-} \sigma_t dB_u + \int [C(u, S_{u-}e^x) - C(u, S_{u-})] J_X(dudx) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

sendo X um processo de Lévy tal que $\hat{S}_t = \exp(X_t) \forall t$.

A diferença entre essas duas equações nos fornece o erro da estratégia de cobertura:

$$\begin{aligned}
\epsilon(V_0, \phi) &= \int_0^T \phi_t S_{t-} \sigma_t - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}) \hat{S}_{t-} \sigma_t dB_t + \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_t \hat{S}_{t-} z - [C(t, S_{t-}(1+z)) - C(t, S_{t-})] J_Z(dtdz). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

A variância desse termo é dada por:

$$\begin{aligned}
E[|\epsilon(V_0, \phi)|^2] &= E\left[\int_0^T \hat{S}_{t-} \sigma_t^2(\phi_t) - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}) dt\right] + \\
&+ E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |C(t, S_{t-}(1+z)) - C(t, S_{t-}) - z \hat{S}_{t-} \phi_t| \nu_Z(dz) dt\right]. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

A cobertura ótima é obtida minimizando-se o valor da expressão acima com respeito a ϕ_t . Diferenciando-na com respeito a ϕ obtemos:

$$\hat{S}_{t-}^2 \sigma^2(\phi_t - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-})) + \int_{\mathbb{R}} \hat{S}_{t-} z [-C(t, S_{t-}(1+z)) - C(t, S_{t-}) + \hat{S}_{t-} z \phi_t] \nu_Z(dz) = 0. \quad (3.10)$$

Isolando ϕ obtemos o resultado desejado. \square

A metodologia proposta por Dupire para modelos de difusão, em Dupire (1994), recupera a medida precificadora Q através de pagamentos contingentes do mercado. Como utilizar estes pagamentos para recuperar a medida martingal equivalente Q quando os ativos considerados seguem um processo de Lévy? Em Cont & Tankov (2004b) e Cont & Tankov (2006), os autores descrevem um método para a sua obtenção.

3.5 Estratégias de cobertura utilizando preços de contratos

Nos modelos anteriores, utilizamos preços de ativos para efetuarmos estratégias de cobertura. Isto envolvia a escolha de uma medida precificadora Q. No entanto, como o mercado é incompleto, verificamos a existência de diversas medidas precificadoras. Então, como escolher a medida precificadora mais adequada? A idéia deste novo método é olharmos não só para preços de ativos mas também para preços de contratos

para determinarmos a medida martingal precificadora mais adequada. Ou seja, agora consideraremos coberturas da seguinte forma:

$$H = H_T = V_0 + \sum_{i=1}^n x_i H_i + \int_0^T \phi_t dS_t + \epsilon. \quad (3.11)$$

sendo x_i a quantidade da opção com pagamento H_i detida pelo investidor, o pagamento H_i é efetuado em T e $E^Q[\epsilon] = 0$.

O valor desta estratégia de cobertura sob a medida de apreçamento risco-neutra é dado por:

$$\pi_0[H] = e^{-rT} E^Q[H] = V_0 + \sum_{i=1}^n x_i e^{-rT} E^Q[H_i]. \quad (3.12)$$

Entretanto, o preço pago para efetuar tal estratégia deve ser:

$$V_0 + \sum_{i=1}^n x_i C_i^*, \quad (3.13)$$

sendo C_i^* o preço observado da opção (em $t=0$) com pagamento H_i .

Portanto, para ocorrer a compatibilidade entre o modelo risco-neutro teórico e os preços observados de mercado, precisamos que a seguinte equação seja satisfeita:

$$C_i^* = e^{-rT} E^Q[H_i]. \quad (3.14)$$

A partir desta igualdade, surge o problema de calibração ao preço de contratos que envolve obter Q a partir dos valores C_i^* observados. Este problema será alvo de estudo no próximo capítulo.

Capítulo 4

Calibração em modelos de Lévy exponenciais

4.1 Problema de Calibração

Segundo Cont & Tankov (2004a), para identificarmos corretamente uma medida risco-neutra devemos levar em conta a informação da série histórica dos preços dos ativos e também os preços negociados de opções. Para alcançarmos isso, podemos restringir a escolha da medida risco-neutra àquelas equivalentes a um modelo a priori, resultante ou da estimação da série histórica ou da visão do avaliador de risco: o processo de calibração se torna então a atualização da medida a priori de acordo com os preços das opções negociadas.

Como discutido no Capítulo 1, se um mercado é livre de arbitragem, os preços das opções de compra européias são calculados como esperanças de pagamentos descontados sob medidas de probabilidade equivalentes à medida que rege os preços. Se essa medida foi estimada através de séries temporais do ativo subjacente, a calibração deve estar restrita às medidas equivalentes a ela. Considerando a nomenclatura dada pela estatística Bayesiana, chamaremos essa medida estimada de medida a priori. Assim, o problema de calibração agora assume o seguinte formato:

Calibração com priori: *Dado um modelo a priori $(\sigma_0, \gamma_0, \nu_0)$ e dados os preços de opções de compra européias C_i , queremos encontrar o modelo Lévy exponencial definido por (σ, γ, ν) tal que os preços dos ativos descontados sejam martingais, a medida de probabilidade Q relacionada a (σ, γ, ν) seja equivalente ao modelo a priori e os preços das opções sejam dados pela esperança descontada dos pagamentos sob Q :*

$$\forall i \in I, C_i = e^{-rT} E^Q[(S_{T_i} - K_i)^+ | S_0 = S], \quad (4.1)$$

sendo I um conjunto de preços observados.

Escolha da medida de probabilidade a Priori

O processo de Calibração pode ser interpretado como o método que corrige o conhecimento inicial sobre a medida de Lévy (implícito na elicitação da priori) de forma que os valores dos preços das opções disponíveis estejam corretamente reproduzidos. Portanto, a escolha da priori é muito importante. Uma possibilidade para sua escolha é o modelo de Lévy exponencial estimado a partir de dados históricos do ativo subjacente. Já no caso em que os dados históricos não são considerados confiáveis ou não estão disponíveis pode-se tomar valores razoáveis (segundo o especialista) para os parâmetros da priori. Na implementação computacional feita neste trabalho, nós obteremos a priori em um procedimento preliminar da calibração como proposto por Cont & Tankov (2004a).

Regularizando com a entropia relativa

Como observado em Cont & Tankov (2004a), pode não haver solução ou podem existir infinitas para a equação 4.1. Ou seja, dentro da classe de processos de Lévy, diversos trios característicos $(\sigma_Q, \gamma_Q, \nu_Q)$ são candidatos a reproduzir os preços das opções de acordo com esta fórmula.

Para resolver este problema, os autores abrem mão da exatidão da calibração ao preço e tomam como critério de calibração a minimização (sobre o conjunto de medidas risco-neutras \mathbb{Q}) da seguinte função de mínimos quadrados:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i |C^{(\sigma_Q, \gamma_Q, \nu_Q)}(t = 0, S_0, T_i, K_i) - C_0^*(T_i, K_i)|^2, \quad (4.2)$$

onde $C^{(\sigma_Q, \gamma_Q, \nu_Q)}(t = 0, S_0, T_i, K_i)$ são preços, no tempo zero, de opções de compra européias com N preços de exercício K_i e maturidade $T_i = T$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ cujo ativo subjacente S_t segue um processo de Lévy e ω_i são pesos cuja especificação será discutida posteriormente.

Como observado em Cont & Tankov (2004a) essa função de minimização não é convexa, já que preços segundo a equação 4.1 não resultam em uma função convexa. Por isso, surgem alguns problemas na obtenção dos resultados:

1) Como a quantidade disponível de preços de opção é finita, e usualmente pequena, existem muitas soluções para (σ, γ, ν) que reproduzem os preços da Call com igual precisão.

2) A função pode apresentar, devido a sua natureza não-convexa, vários mínimos locais o que pode comprometer a obtenção da verdadeira solução. Como resultado disso, percebemos que a solução da medida de Lévy, assim como da volatilidade, depende fortemente não só dos preços da Call mas também do ponto de início do algoritmo de minimização.

Para resolvermos os problemas de não-unicidade e não-estabilidade do problema de calibração acima incluiremos um termo convexo à equação de mínimos quadrados no intuito de tornar a função de minimização convexa. Este termo é a Entropia Relativa

(também chamada de distância de KullBack-Leibler) de Q com respeito à P apresentada na definição 2.6.

Temos, portanto, o seguinte problema:

Problema de Calibração: *Dados os preços de opções C_i^* e assumindo a priori que o processo de preços segue um modelo de Lévy exponencial P_0 com trio característico $(\sigma_0, \gamma_0, \nu_0)$, queremos encontrar o modelo martingal Q definido por $(\sigma_Q, \gamma_Q, \nu_Q)$ que minimiza a expressão:*

$$\sum_{i=1}^N \omega_i |C^{(\sigma_Q, \gamma_Q, \nu_Q)}(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_i^*(T_i, K_i)|^2 + \alpha \xi(Q|P_0), \quad (4.3)$$

sendo α o parâmetro de regularização que define a importância do termo de entropia relativa na equação de minimização e (T_i, K_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, pares com os tempos de maturidade e preços de exercício disponíveis no mercado.

Observe a importância da escolha da medida a priori P_0 : se a medida Q não é absolutamente contínua com respeito à P_0 , então a expressão 4.3 é infinita, já que $\xi(Q|P_0) = \infty$, logo a solução pertence ao conjunto de medidas Q absolutamente contínuas com respeito à P_0 .

Para o caso de processos de Lévy, a proposição 2.7 nos diz que, para que duas medidas sejam equivalentes, seus coeficientes de volatilidade devem ser iguais, ou seja, uma vez especificado σ_0 este também será o coeficiente de volatilidade da medida a posteriori. A proposição 2.8 nos fornece condições para que a medida calibrada seja martingal. Uma destas condições nos fornece o parâmetro γ como função de σ e ν . Por isto, quando obtemos a priori (σ_0, ν_0) , e como consequência γ_0 , já possuímos a volatilidade da posteriori e, como o γ é função da volatilidade e da medida de Lévy a posteriori, só precisamos obter através da calibração a medida de Lévy ν a posteriori. Isto está implícito na equação 4.4. Portanto, uma vez especificada a priori, ou seja, uma vez escolhido o modelo Lévy exponencial P_0 com parâmetros (σ_0, ν_0) , nosso problema se torna encontrar a medida de Lévy ν (equivalente a ν_0) que minimiza a expressão:

$$J(\nu) = \sum_{i=1}^N \omega_i |C_0^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_0^*(T_i, K_i)|^2 + \alpha \xi(\nu), \quad (4.4)$$

sendo $\xi(\nu)$ a entropia relativa da medida risco-neutra com respeito à medida a priori.

4.2 Implementação computacional

Nesta seção, será discutido como as idéias gerais das seções anteriores podem ser aplicadas ao problema de calibração da medida de Lévy quando o modelo que rege os preços dos ativos obedece a um processo de difusão com saltos. Consideraremos que os

saltos seguem um processo de Poisson composto e que a volatilidade é não-nula.

O nosso objetivo é minimizar a função $J(\nu)$ definida em 4.4, assim, precisamos de um método eficiente para, a partir de um modelo de difusão com saltos, criar preços de opções $C^\nu(t = 0, S_0, T_i, K_i)$.

O método que utilizaremos gera preços de opções de compra européias (só podem ser exercidas no vencimento) a partir de processos de difusão com saltos, ele pode ser visto em Carr & Madan (1999) e será descrito no apêndice. Por este método a medida ν deve ser discretizada. Isto é feito definindo uma malha uniforme da forma $\frac{i}{M}$ com i variando de $-M$ a M . Neste trabalho consideramos $M=100$. Em seguida, definiremos a medida discretizada ν_M como:

$$\nu_M(\{\frac{i}{M}\}) = \nu([\frac{i}{M}, \frac{i+1}{M}]).$$

Como a medida ν é absolutamente contínua, $\nu_M \rightarrow \nu$ em distribuição.

Como proposto em Cont & Tankov (2004a) para o caso de dados simulados, iremos gerar preços de contratos de opções de compra européia supondo que os preços dos ativos seguem um processo de difusão com saltos segundo o processo de Poisson composto cuja intensidade dos saltos é $\lambda = 1$, a volatilidade $\sigma = 0.1$ e o tamanho dos saltos segue a seguinte medida de Lévy:

$$\nu(x) = \lambda[1_{x>0}p\alpha_1e^{-\alpha_1x} + (1-p)\alpha_2e^{\alpha_2x}1_{x<0}], \quad (4.5)$$

ou seja será o modelo de Kou.

Para o caso de dados obtidos do mercado essa geração de preços não será necessária, já que utilizaremos diretamente os preços de contratos de opções de compra européia já existentes.

Com os preços em mãos nós precisamos obter a medida de Lévy a priori. Neste trabalho, a medida a priori considerará que os preços dos ativos seguem um processo de difusão com saltos segundo o processo de Poisson composto cuja intensidade dos saltos é λ e o tamanho dos saltos é normalmente distribuído com média zero e desvio-padrão Δ , ou seja será o modelo de Merton.

Utilizaremos novamente o algoritmo proposto em Carr & Madan (1999) para gerar preços de contrato de opções de compra européia em função dos parâmetros da priori σ, λ, Δ que representam respectivamente, o coeficiente de volatilidade, a intensidade dos saltos e o desvio-padrão do tamanho dos saltos.

Os parâmetros da priori serão obtidos ao minimizarmos a distância quadrática entre os preços gerados a partir do modelo de Kou (ou obtidos no mercado) e os preços gerados pelo modelo a priori de Merton. Ou seja, minimizaremos a seguinte expressão com respeito aos parâmetros σ, λ, Δ :

$$\Gamma(\sigma, \lambda, \Delta) = \min_{\sigma, \lambda, \Delta} \sum_{i=1}^N \omega_i |C_0^{\sigma, \lambda, \Delta}(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_0^*(T_i, K_i)|^2, \quad (4.6)$$

sendo $C_0^*(T_i, K_i)$ os preços gerados a partir do modelo de Kou (ou obtidos no mercado) e $C_0^{\sigma, \lambda, \Delta}(t=0, S_0, T_i, K_i)$ os preços gerados a partir do modelo de Merton em função dos parâmetros σ, λ, Δ . Ou seja, a priori é obtida em uma primeira etapa de calibração.

Os pesos ω_i serão uniformes para o caso de dados simulados e, no caso de dados obtidos no mercado, levaremos em consideração o intervalo bid-ask. Os preços bid e ask associados ao preço de uma opção são representativos da pressão de compra e de venda desta opção. Escolheremos os pesos ω_i de forma que as opções com preço de formação mais instáveis, ou seja, com maior intervalo bid-ask tenham pesos menores.

Uma vez obtidos os parâmetros da priori, estamos prontos para obter a medida a posteriori. Determinaremos esta medida minimizando a expressão 4.4.

Essa minimização ocorrerá de forma distinta para os casos paramétrico e não-paramétrico. No caso paramétrico, a posteriori continua sendo definida pelo modelo de Merton ou seja a minimização da posteriori será em função dos parâmetros $(\sigma_{post}, \lambda_{post}, \Delta_{post})$:

$$J(\nu_{(\sigma_{post}, \lambda_{post}, \Delta_{post})}) = \sum_{i=1}^N \omega_i |C_0^{\sigma_{post}, \lambda_{post}, \Delta_{post}}(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_0^*(T_i, K_i)|^2 + \alpha \xi(\sigma_{post}, \lambda_{post}, \Delta_{post}). \quad (4.7)$$

Já no caso não-paramétrico, como proposto em Cont & Tankov (2004b), os preços dos contratos de opção de compra europeia não serão função de parâmetros, mas sim de cada ponto da medida de Lévy ν . Ou seja, minimizaremos a expressão a seguir no conjunto de valores que cada ponto da medida de Lévy ν pode assumir:

$$J(\nu) = \sum_{i=1}^N \omega_i |C_0^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_0^*(T_i, K_i)|^2 + \alpha \xi(\nu), \quad (4.8)$$

sendo $C_0^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i)$ os preços das opções de compra europeias em função dos pontos da medida de Lévy.

O coeficiente α , tanto para o modelo paramétrico quanto para o não-paramétrico, será escolhido de forma que o erro de calibração da medida a posteriori seja em torno de dez por cento maior do que o da priori. Esta escolha é justificada em Cont & Tankov (2006) onde os autores afirmam que o ganho de estabilidade pela introdução da entropia relativa deve ser proporcional à perda de precisão (princípio da discrepância de Morozov).

Portanto, para determinarmos o α ótimo, precisamos minimizar a função $J(\nu)$. Ou seja, o valor ótimo para α e o vetor de soluções ν serão determinados simultaneamente.

Utilizaremos o algoritmo *nlsminb* do software estatístico R para o caso paramétrico e o método L-BFGS-B descrito em Byrd et al. (1995) para o caso não-paramétrico, algoritmo que necessita adicionalmente da expressão do gradiente da função a ser minimizada.

Assim, queremos α e simultaneamente o vetor solução ν tais que:

$$J_{\alpha}^*(\nu) = \sum_{i=1}^N \omega_i |C_0^{\nu}(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_0^*(T_i, K_i)|^2 + \alpha \xi(\nu) \approx (1.1)\Gamma(\sigma, \lambda, \Delta), \quad (4.9)$$

sendo $\Gamma(\sigma, \lambda, \Delta)$ o erro a priori do modelo definido em 4.6.

A aplicação do algoritmo discutido acima (com dados simulados e com dados reais de mercado) será descrita nas seções 4.3 e 4.4 (enfoque paramétrico) e nas seções 4.5 e 4.6 (enfoque não-paramétrico).

4.3 Calibração paramétrica (Dados simulados)

Nesta seção, calibraremos a medida de Lévy segundo o algoritmo proposto e utilizaremos os postulados da inferência Bayesiana paramétrica, discutindo suas vantagens e limitações.

Aqui foi utilizado o software R para construir o algoritmo proposto.

Utilizamos inicialmente o modelo de difusão com saltos apresentado em Kou (2002) com coeficiente de difusão $\sigma_0 = 0.1$ e medida de Lévy dada por:

$$\nu(x) = \lambda [1_{x>0} p \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} + (1-p) \alpha_2 e^{\alpha_2 x} 1_{x<0}]. \quad (4.10)$$

Escolhemos $\alpha_1 = \frac{1}{0.07}$ e $\alpha_2 = \frac{1}{0.13}$ de modo que a cauda esquerda é mais pesada que a direita. A intensidade dos saltos escolhida foi $\lambda = 1$ e p foi determinado de forma que a densidade fosse contínua em $x=0$, ou seja:

$$\nu(0) = p \alpha_1 e^{-\alpha_1 0} = (1-p) \alpha_2 e^{\alpha_2 0} \quad (4.11)$$

$$p = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (4.12)$$

A densidade especificada aparece na figura 4.1:

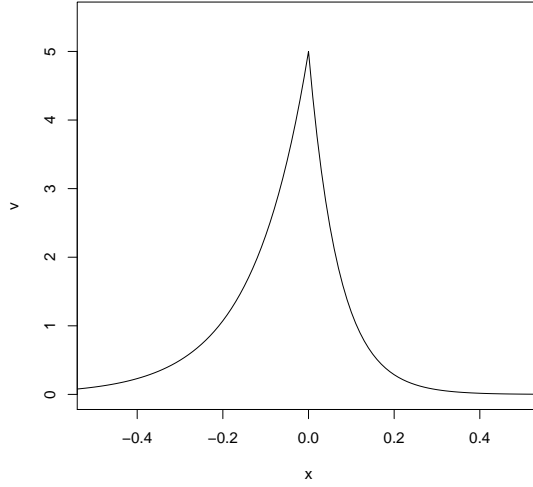


Figura 4.1: Densidade de Kou

Os preços da opção foram calculados utilizando a transformada rápida de Fourier descrita no apêndice. Com base nas expressões anteriores, foram gerados preços de opções para o modelo de Kou onde a maturidade da opção foi de 5 semanas com 22 preços de exercício equidistantes variando de 6 a 14, ou seja

$$T_i = 5 \text{semanas}$$

$$K_i = 6 + \frac{8i}{21}, i = 0, 1, \dots, 21. \quad (4.13)$$

Além disso, consideramos o preço inicial do ativo $S_0 = 10$.

Observação: Para gerar os preços, nós aplicamos o método proposto em Carr & Madan (1999) descrito no apêndice. Está implícito neste método a aproximação de determinadas integrais por somas, de modo que algumas aproximações são feitas. Assim, se conseguirmos resolver analiticamente a expressão de algumas dessas integrais estaremos diminuindo a aproximação gerada pela incapacidade do computador de efetuar integrais. A seguir, desenvolvemos a expressão analítica de dois termos envolvendo integrais:

$$\gamma = r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)\nu(x)dx = \quad (4.14)$$

$$= r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} e^x \nu(x)dx + \lambda. \quad (4.15)$$

Calcularemos agora o termo da integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x \nu(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \lambda [1_{x>0} p \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} + (1-p) \alpha_2 e^{\alpha_2 x} 1_{x<0}] dx = \quad (4.16)$$

$$= \lambda \left[p \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{(1-\alpha_1)x} + (1-p) \alpha_2 \int_{-\infty}^0 e^{(1+\alpha_2)x} dx \right] \quad (4.17)$$

$$= \frac{\lambda p \alpha_1}{1-\alpha_1} + \frac{\lambda(1-p)\alpha_2}{1+\alpha_2}. \quad (4.18)$$

O segundo termo a ser calculado analiticamente é

$$\phi_T(u) = \exp\left(T\left(i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\nu(x)dx\right)\right). \quad (4.19)$$

Novamente, calcularemos a integral: (o cálculo é análogo ao de cima)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \nu(x) dx = \frac{\lambda p \alpha_1}{iu(1-\alpha_1)} + \frac{\lambda(1-p)\alpha_2}{iu(1+\alpha_2)}. \quad (4.20)$$

O gráfico 4.2 nos revela a relação entre os preços das opções gerados para processos de difusão com saltos cuja medida de saltos segue o modelo de Kou e os preços de exercício:

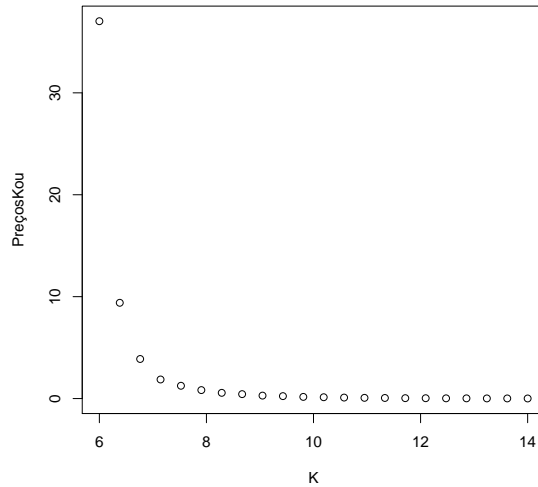


Figura 4.2: Preços de opções de compra em função do preço de exercício para o modelo de Kou.

Os valores dos preços estão expressos na seguinte tabela:

k=6	37.03038144		0.13248088
k=6+\frac{8}{21}	9.39955481		0.09838927
k=6+\frac{16}{21}	3.88547283		0.07312757
...	1.87356260		0.05975348
	1.25650603		0.04122184
	0.83152836		0.03683136
	0.56384071		0.02458736
	0.43602755		0.02308244
	0.29170541		0.01599519
	0.24013854	...	0.01479612
	0.16559443	k = 14	0.01129937

Como modelo a priori para a medida de Lévy nós escolheremos o modelo de difusão com saltos de Merton. Ou seja, a parte da distribuição do log-preço com saltos segue um processo de Poisson composto e o tamanho dos saltos é normalmente distribuído com média zero:

$$X_t = \tilde{\gamma}t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (4.21)$$

sendo $Y_i \sim N(0, \Delta^2)$ i.i.d., B_t um movimento Browniano e $N(t)$ um processo de Poisson de intensidade θ . Pela observação na página 14, o trio característico de X_t é $(\sigma, \tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$, onde $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}(x)dx$ com $\tilde{\nu} = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}}$ devido a distribuição dos Y_i 's ser $N(0, \Delta^2)$.

No modelo de Merton, o preço de uma opção de compra pode ser visto como uma média ponderada de preços de Black and Scholes convergindo exponencialmente para zero. Esta série nos permite que os preços da opção sejam rapidamente calculados. Assim como no modelo anterior, algumas integrais implícitas no modelo foram calculadas de forma a mitigar os erros de aproximação das integrais por somas, elas serão apresentadas a seguir:

$$\tilde{\gamma} = r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)\tilde{\nu}(x)dx = \quad (4.22)$$

$$= r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} e^x \tilde{\nu}(x)dx + \theta. \quad (4.23)$$

Calcularemos agora o termo da integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x \tilde{\nu}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \theta \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}} dx = \quad (4.24)$$

$$= \theta \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x - \frac{x^2}{2\Delta^2}} dx. \quad (4.25)$$

Completando o quadrado obtemos:

$$= \theta \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{\frac{\Delta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\Delta^2)^2}{2\Delta^2}} dx. \quad (4.26)$$

Repare que temos o núcleo de uma Normal com média e variância iguais a Δ^2 . Assim, como resultado temos:

$$\theta e^{\frac{\Delta^2}{2}}. \quad (4.27)$$

Podemos novamente calcular analiticamente o seguinte termo:

$$\phi_T(u) = \exp\left(T\left(i\tilde{\gamma}u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\tilde{\nu}(x)dx\right)\right). \quad (4.28)$$

Os cálculos do termo envolvendo integral são semelhantes ao de cima, teremos como resultado da integral:

$$\theta e^{\frac{\Delta^2 u^2}{2}}. \quad (4.29)$$

Nesta etapa, nós temos os preços gerados a partir do modelo de Kou e os preços gerados a partir do modelo de Merton em função dos parâmetros σ , θ , Δ , que são respectivamente a volatilidade do Browniano, a intensidade dos saltos e o desvio da medida de Lévy. Queremos estimar nosso modelo a priori e, como já discutido, ele será definido pelo trio paramétrico (σ, θ, Δ) que minimiza a expressão:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i |C^{(\sigma, \theta, \Delta)}(t=0, S_0, T, K_i) - C_0^*(T, K_i)|^2, \quad (4.30)$$

sendo $C_0^*(T, K_i)$ os preços simulados a partir do modelo de Kou e $C^{(\sigma, \theta, \Delta)}(t=0, S_0, T, K_i)$ os preços gerados a partir do modelo de Merton.

Observação: Como os preços foram gerados a partir de um modelo teórico não faz sentido atribuir a eles pesos diferentes provenientes de incertezas quanto a sua especificação. Como já discutido, no caso de preços de opções de compra obtidos no mercado, tomaremos o inverso do quadrado do intervalo *bid-ask* como peso, mas, neste caso, consideraremos que todos os preços possuem o mesmo peso, ou seja, consideramos $\omega_i = 1/N, \forall i = 1, 2, \dots, N$.

Utilizando o algoritmo de otimização *nlmminb* do software R para encontrar o trio paramétrico que minimiza 4.30, obtivemos:

σ	θ	Δ
0.2951422	0.8741953	0.1119754

Os preços correspondentes ao modelo de Merton com os parâmetros ótimos especificados acima e os mesmos pares (T_i, K_i) descritos em 4.13 são:

k=6	37.134557627		0.229863261
$k=6+\frac{8}{21}$	8.107837193		0.143664719
$k=6+\frac{16}{21}$	4.930429637		0.095910715
...	2.918318096		0.063990088
	2.291569776		0.036451389
	1.898969173		0.029315550
	1.424112539		0.012021466
	1.058229268		0.013721811
	0.695687741		0.003335638
	0.507138007	...	0.006442529
	0.320820314	k = 14	0.002003774

Na figura 4.3, segue o gráfico dos preços ótimos encontrados em função dos preços de exercício:

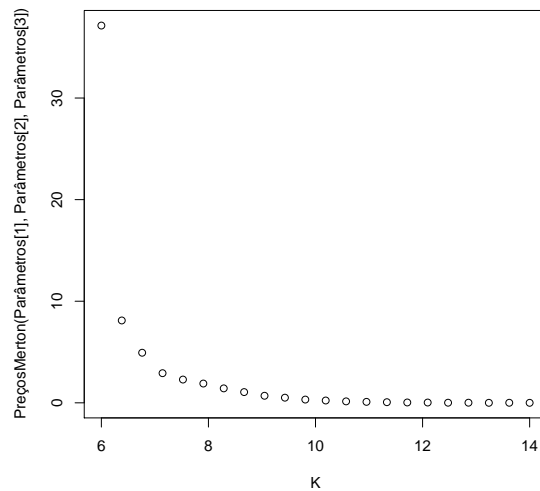


Figura 4.3: Preços de opções de compra em função dos preços de exercício para o modelo de Merton a priori com parâmetros $(0.2951422, 0.8741953, 0.1119754)$.

O formato da medida de Lévy a priori pode ser visto na figura 4.4.

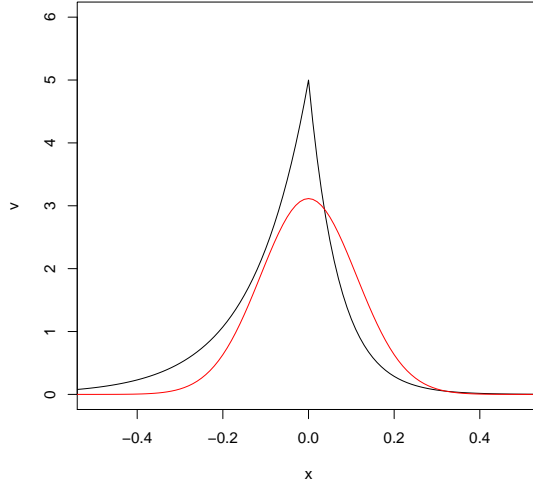


Figura 4.4: Em vermelho, a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton. Em preto, a medida de Kou.

Calcularemos agora a medida de Lévy paramétrica a posteriori a qual também supomos ser do tipo Merton. Incluiremos o termo de regularização (Entropia Relativa) e tomaremos α como proposto em Cont & Tankov (2004a), ou seja, que torna o erro da posteriori 10 por cento maior do que o da priori (trocamos um pouco de precisão pela estabilidade).

Para que a medida a posteriori seja risco-neutra, ou seja martingal e equivalente, precisamos que o coeficiente de volatilidade σ da posteriori seja igual ao coeficiente de volatilidade da priori. Portanto, a função de otimização da posteriori terá como parâmetros apenas a intensidade dos saltos θ_p e a variância da medida de Lévy Δ_p .

Precisamos da expressão da entropia relativa para podermos prosseguir, ela é fornecida pela proposição 2.9.

Assim, possuímos todos os termos que precisamos para minimizar a seguinte função com relação aos parâmetros θ_p e Δ_p da posteriori:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i |C^{(\theta_p, \Delta_p)}(t=0, S_0, T, K_i) - C_0^*(T, K_i)|^2 + \alpha \xi(\nu|\nu_0), \quad (4.31)$$

sendo $C_0^*(T, K_i)$ os preços simulados a partir do modelo de Kou e $C^{(\theta_p, \Delta_p)}(t=0, S_0, T, K_i)$ os preços gerados a partir do modelo de Merton.

Utilizando o algoritmo de otimização *nlmminb* do software R para encontrar a dupla paramétrica que minimiza a função acima, obtivemos:

θ_p	Δ_p
1.3384206	0.1147346

Os preços correspondentes ao modelo de Merton com os parâmetros ótimos especificados acima são:

k=6	35.24823836		0.40146270
$k=6+\frac{8}{21}$	8.30380316		0.32009995
$k=6+\frac{16}{21}$	4.12572154		0.22390285
...	1.08104040		0.17489814
	0.98431905		0.11903052
	0.94563329		0.08879911
	0.92172745		0.06218809
	0.89980664		0.04226464
	0.78451010		0.03268860
	0.65751317	...	0.01904374
	0.53842910	k = 14	0.01712082

As figuras 4.5 e 4.6 representam, respectivamente, o gráfico dos preços ótimos encontrados em função dos preços de exercício e o gráfico da medida de Lévy a posteriori encontrada.

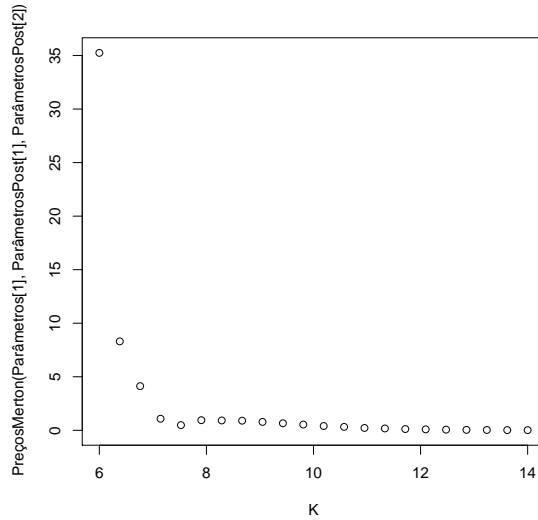


Figura 4.5: Preços ótimos em função dos preços de exercício.

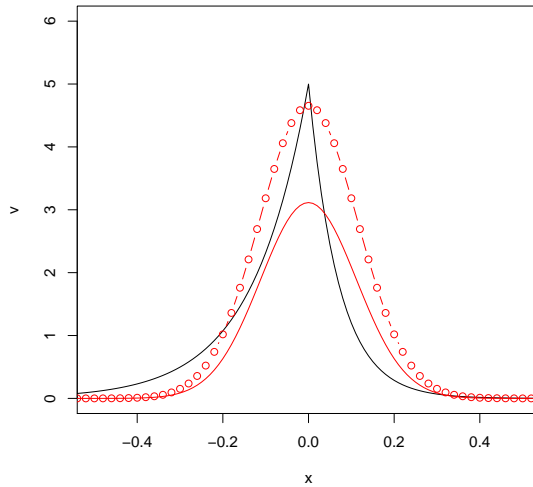


Figura 4.6: Em vermelho, a linha contínua representa a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton e o tracejado representa a medida a posteriori. Em preto, a medida de Kou.

Repare que, devido à natureza paramétrica imposta sobre a medida de Lévy, a distribuição a posteriori não consegue captar determinados efeitos da distribuição que gerou os dados. No nosso caso, a assimetria da distribuição de Kou (a cauda esquerda é mais pesada) não pôde ser absorvida pelo modelo de Merton, de modo que para compensar o peso da cauda esquerda a nossa distribuição a posteriori acaba tendo que compensar e extrapola o peso da cauda direita, superestimando-o. Isto está claro na figura 4.6.

Agora mudaremos a priori para investigarmos o efeito na posteriori, ou seja iremos investigar se a entropia relativa, de fato, regularizou o problema paramétrico.

Primeiramente, os parâmetros da priori serão modificados da seguinte forma:

$$(0.2951422, 0.8741953, 0.1119754) \rightarrow (0.2951422, 0.4370977, 0.0895803)$$

Os preços da opção de compra europeia para a nova priori estão expressos na seguinte tabela:

k=6	39.380829205		0.132564355
$k=6+\frac{8}{21}$	8.978202875		0.075045479
$k=6+\frac{16}{21}$	6.122928874		0.059275265
...	3.737942429		0.026943391
	2.398014265		0.027465632
	1.426834779		0.008693074
	0.988548295		0.012910169
	0.641200566		0.003238455
	0.454062865		0.006167220
	0.299848647	...	0.002624344
	0.193848275	k = 14	0.003142461

Repare na consistência do método de apreçamento: pequenas variações na medida de saltos geram pequenas alterações nos preços da opção.

O gráfico dos preços da opção para a nova priori em função dos preços de exercício está expresso na figura 4.7.

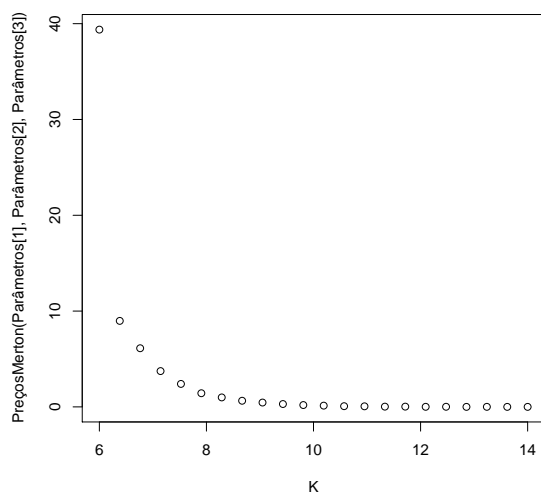


Figura 4.7: Relação entre os preços gerados a partir nova priori e os preços de exercício.

O gráfico comparativo da nova priori (em azul) pode ser visto na figura 4.8.

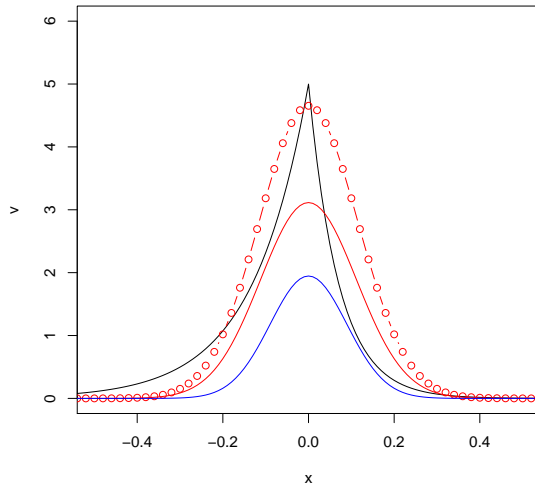


Figura 4.8: Em vermelho, a linha contínua representa a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton e o tracejado representa a medida a posteriori. Em preto, a medida de Kou e em azul a nova priori.

Rodamos o algoritmo para encontrarmos os parâmetros ótimos que definem a nova posteriori e obtivemos $\theta_p = 1.3384206$ e $\Delta_p = 0.1147346$. O gráfico 4.9 mostra que a nova posteriori (azul) se sobrepõe à primeira posteriori.

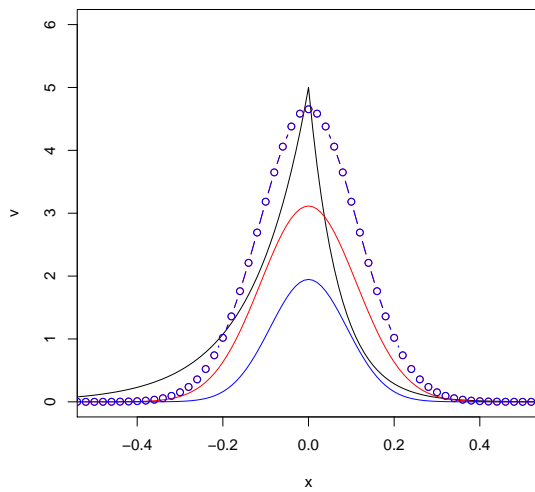


Figura 4.9: Em vermelho, a linha contínua representa a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton. A linha azul representa a priori modificada e o tracejado azul representa a medida a posteriori. Em preto, a medida de Kou.

Este resultado nos dá confiança de que variações na priori são regularizadas pela entropia relativa. Para confirmarmos, moveremos a priori na direção oposta. Agora os parâmetros da priori serão especificados como (0.29514222, 1.09274415, 0.07166425).

O gráfico comparativo da nova priori (em azul) pode ser visto na figura 4.10.

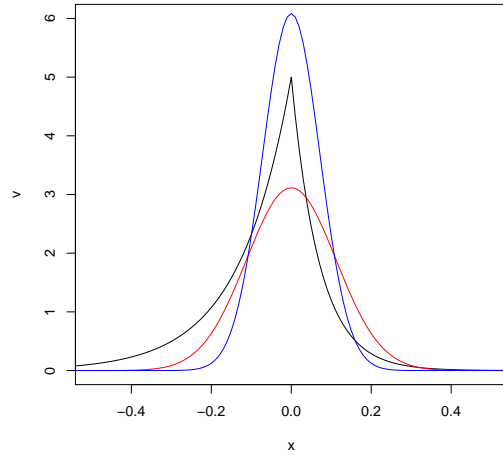


Figura 4.10: Em vermelho, a linha contínua representa a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton. Em preto, a medida de Kou e em azul a nova priori.

Rodamos o algoritmo e encontramos $\theta_p = 1.3384206$ e $\Delta_p = 0.1147346$. A superposição das posterioris está expressa no gráfico 4.11.

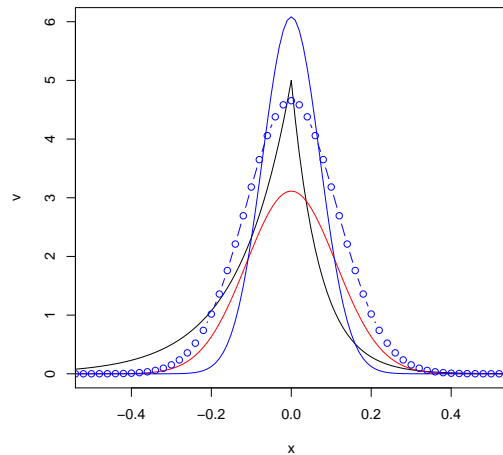


Figura 4.11: Em vermelho, a linha contínua representa a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton. A linha azul representa a priori modificada e o tracejado azul representa a medida a posteriori. Em preto, a medida de Kou.

Em seguida, nós alteramos o ponto de inicialização dos parâmetros do algoritmo, para verificarmos se o problema está regularizado. O gráfico 4.12 nos mostra a diferença entre as posteriores.

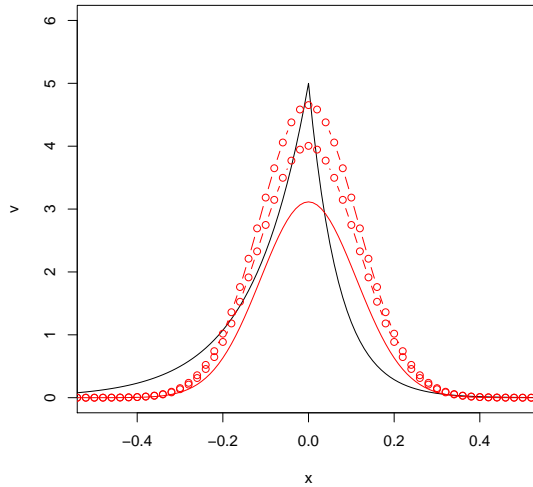


Figura 4.12: Em vermelho, a linha contínua representa a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton e os tracejados vermelhos representam as medidas a posteriori obtidas com diferentes pontos de inicialização. Em preto, a medida de Kou.

Observação: Como observado em Cont & Tankov (2004a), apesar da influência do ponto de inicialização do algoritmo (que são os valores iniciais para os parâmetros na rotina de otimização), a mudança observada na medida de Lévy a posteriori ocorreu apenas em regiões próximas a zero o que não altera de forma relevante a medida de Lévy.

Assim, obtivemos indícios de que o problema de calibração paramétrico foi regularizado pela entropia relativa. No entanto, devido a natureza restrita do problema paramétrico (existem restrições muito fortes sobre a forma da distribuição dos dados), nos é atraente a idéia de implementar o problema não paramétrico. A idéia é que poderemos capturar eventuais características da medida de Lévy do processo: tais como presença de assimetria, caudas mais pesadas do que a Normal e até mesmo bi-modalidade da distribuição. Tudo isso nos motiva a encarar o problema de calibração não-paramétrico.

4.4 Calibração paramétrica (Dados reais)

Agora nós tentaremos recuperar a medida de Lévy de contratos reais do mercado. Nós obtivemos no site da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) preços de opções de compra da Petrobras na data 08/10/2010 com vencimento em 7 semanas, ou seja, $T_i = 7$ semanas e os K_i 's são listados na tabela a seguir junto com os preços das opções. O valor da ação da Petrobras (Petr4) nesta data era 26,00 reais e existiam 19 preços de exercícios disponíveis para esta data além dos seus preços de Bid e de Ask. A taxa de juros utilizada foi $r = 0.5\%a.m.$.

As três tabelas abaixo contém respectivamente os preços da opção, os preços de Bid e os preços de Ask obtidos:

Preços da opção:

k = 21.83	4.59	k = 37.43	0.04
k = 23.83	3.03	k = 39.43	0.02
k = 25.00	2.19	k = 42.00	0.02
k = 26.00	1.65	k = 43.43	0.01
k = 27.83	0.85	k = 46.00	0.01
k = 29.00	0.53	k = 48.00	0.01
k = 29.43	0.45	k = 49.43	0.01
k = 30.83	0.25	k = 52.00	0.01
k = 31.83	0.19		
k = 33.43	0.12		
k = 35.43	0.07		

Preços Bid (representam as ofertas de quem quer comprar a opção):

k = 21.83	4.11	k = 37.43	0.04
k = 23.83	2.80	k = 39.43	0.02
k = 25.00	1.85	k = 42.00	0.01
k = 26.00	1.65	k = 43.43	0.01
k = 27.83	0.85	k = 46.00	0.01
k = 29.00	0.42	k = 48.00	0.01
k = 29.43	0.44	k = 49.43	0.01
k = 30.83	0.25	k = 52.00	0.01
k = 31.83	0.18		
k = 33.43	0.10		
k = 35.43	0.07		

Preços Ask (representam as ofertas de quem quer vender a opção):

k = 21.83	4.75	k = 37.43	0.05
k = 23.83	3.15	k = 39.43	0.04
k = 25.00	6.69	k = 42.00	0.03
k = 26.00	1.70	k = 43.43	0.03
k = 27.83	0.87	k = 46.00	0.03
k = 29.00	0.55	k = 48.00	0.02
k = 29.43	0.45	k = 49.43	0.02
k = 30.83	0.38	k = 52.00	0.02
k = 31.83	0.19		
k = 33.43	0.12		
k = 35.43	0.08		

Na figura 4.13, se encontra o gráfico dos preços da opção em função dos preços de exercício.

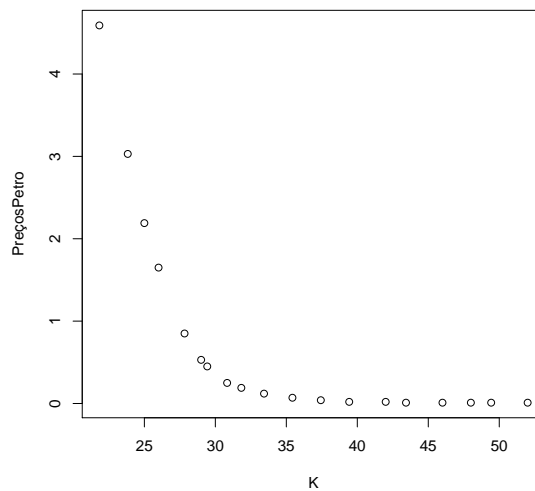


Figura 4.13: Relação entre os preços da opção e os preços de exercício.

Agora, seguiremos o algoritmo para encontrarmos os parâmetros que definem a priori. Como já discutido, o peso de cada preço será proporcional ao intervalo Bid-Ask. Aplicando o algoritmo para obter a priori minimizando 4.30 e supondo novamente um modelo de Merton, nós obtivemos os seguintes parâmetros para a priori:

σ	θ	Δ
0.6063025	2.0044131	0.3469500

Os preços gerados por essa priori estão na tabela a seguir:

k = 21.83	2.6253209377	k = 37.43	0.0418448537
k = 23.83	1.8515389006	k = 39.43	0.0211331957
k = 25.00	1.1815133170	k = 42.00	0.0093953145
k = 26.00	1.1107474184	k = 43.43	0.0020777244
k = 27.83	0.6990592591	k = 46.00	0.0016366005
k = 29.00	0.4594746086	k = 48.00	0.0013661825
k = 29.43	0.4767101912	k = 49.43	0.0006897237
k = 30.83	0.3942016476	k = 52.00	0.0006103898
k = 31.83	0.3047902159		
k = 33.43	0.1942095898		
k = 35.43	0.0977639906		

Podemos observar a relação expressa na tabela no gráfico 4.14:

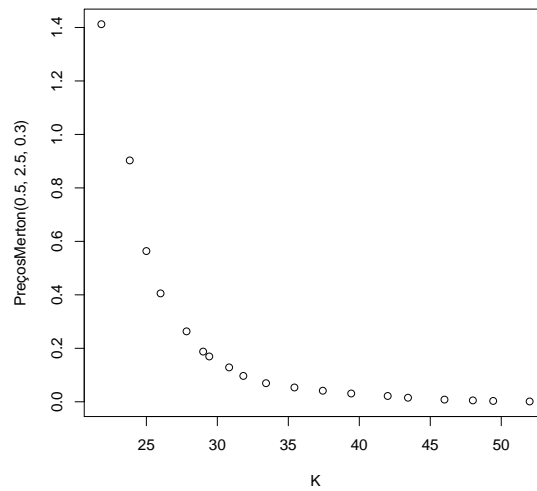


Figura 4.14: Preços da opção gerados pela priori em função dos preços de exercício.

A medida de Lévy a priori pode ser vista na figura 4.15:

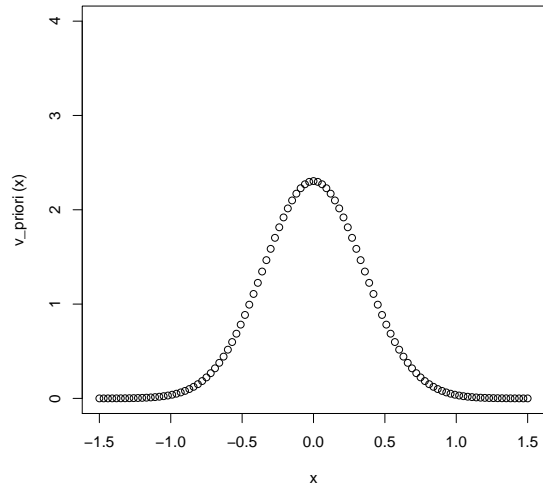


Figura 4.15: Medida de Lévy a priori.

Calcularemos agora a medida de Lévy a posteriori. Incluindo a entropia relativa e executando a otimização, obtivemos os parâmetros ótimos $\theta_p = 2.0689859$ e $\Delta_p = 0.2971782$.

O gráfico da medida de Lévy a posteriori e a sua relação com a priori podem ser observados na figura 4.16.

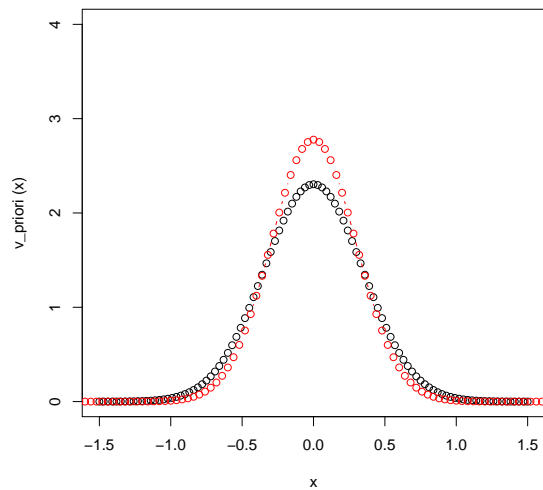


Figura 4.16: Medida de Lévy a posteriori em vermelho em comparação com a medida de Lévy a priori em preto.

Os preços gerados pela medida de Lévy a posteriori obtida estão expressos na tabela a seguir:

k = 21.83	4.150546256	k = 37.43	0.108038957
k = 23.83	2.379361796	k = 39.43	0.074457402
k = 25.00	1.591286627	k = 42.00	0.044770156
k = 26.00	1.048509973	k = 43.43	0.025493502
k = 27.83	0.649196428	k = 46.00	0.013892433
k = 29.00	0.528734124	k = 48.00	0.008445679
k = 29.43	0.452219754	k = 49.43	0.003394736
k = 30.83	0.300129081	k = 52.00	0.001950477
k = 31.83	0.239918455		
k = 33.43	0.205167340		
k = 35.43	0.157298516		

A relação expressa na tabela pode ser observada graficamente na figura 4.17.

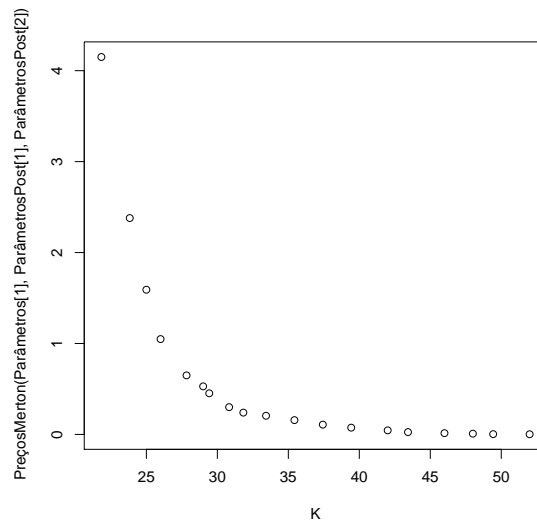


Figura 4.17: Relação entre os preços da opção gerados pela posteriori e os preços de exercício.

Observamos, portanto, nesta aplicação utilizando dados reais de mercado, uma boa aproximação dos preços reais pela medida a posteriori obtida já que não há grandes discrepâncias. Isso nos dá indícios de que o modelo paramétrico aproxima com razoável precisão a medida real. No entanto, as restrições de forma do modelo paramétrico não permitem que a medida de Lévy possa recuperar eventuais características da distribuição real. O nosso próximo passo é investigar a abordagem não-paramétrica, que nos permitirá observar se existem tais características.

4.5 Calibração não-paramétrica (Dados simulados)

Nesta seção, calibraremos a medida de Lévy segundo o algoritmo proposto e utilizaremos os postulados da inferência Bayesiana não-paramétrica, discutindo suas vantagens e limitações. Este método aparece em Cont & Tankov (2004b) e em Cont & Tankov (2004a).

Assim como no caso paramétrico, foi utilizado o software R para construir o algoritmo proposto.

Novamente, trabalharemos com dados simulados para validarmos a calibração. Utilizaremos inicialmente o modelo de Kou para avaliarmos se, assim como no caso paramétrico, a posteriori não paramétrica recupera a distribuição que gerou os preços da opção de compra europeia. A vantagem dessa nova abordagem é que não assumiremos distribuição Normal para a medida de Lévy a posteriori, ou seja, ela terá liberdade para recuperar determinadas características da medida que gerou os dados, neste caso uma leve assimetria à esquerda do modelo de Kou especificado.

Abaixo, relembremos a forma da medida de Lévy adotada assim como os preços gerados por essa especificação:

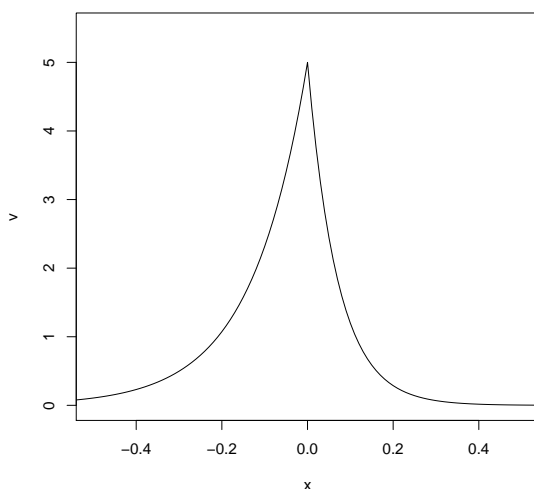


Figura 4.18: Densidade de Kou

Mantivemos os mesmos parâmetros do modelo de Kou do caso paramétrico e os pares (T_i, K_i) são especificados como em 4.13. Os preços do modelo de Kou são lembrados na seguinte tabela:

k=6	37.03038144		0.13248088
k=6+\frac{8}{21}	9.39955481		0.09838927
k=6+\frac{16}{21}	3.88547283		0.07312757
...	1.87356260		0.05975348
	1.25650603		0.04122184
	0.83152836		0.03683136
	0.56384071		0.02458736
	0.43602755		0.02308244
	0.29170541		0.01599519
	0.24013854	...	0.01479612
	0.16559443	k = 14	0.01129937

Assim como no modelo paramétrico, consideraremos que a distribuição a priori segue o modelo de difusão com saltos de Merton, ou seja, a parte da distribuição do log-preço com saltos segue um processo de Poisson composto e o tamanho dos saltos é normalmente distribuído com média zero:

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (4.32)$$

sendo $Y_i \sim N(0, \Delta^2)$ i.i.d., B_t um movimento Browniano e $N(t)$ um processo de Poisson de intensidade θ .

Queremos estimar nosso modelo a priori e, como já discutido, ele será definido pelo trio paramétrico (σ, θ, Δ) que minimiza a expressão:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i |C^{(\sigma, \theta, \Delta)}(t=0, S_0, T, K_i) - C_0^*(T, K_i)|^2, \quad (4.33)$$

sendo $C_0^*(T, K_i)$ os preços simulados a partir do modelo de Kou e $C^{(\sigma, \theta, \Delta)}(t=0, S_0, T, K_i)$ os preços gerados a partir do modelo de Merton.

Utilizando o algoritmo de otimização *nminb* do software R para encontrar o trio paramétrico que minimiza a função acima, obtivemos:

σ	θ	Δ
0.1	1.923955	0.2

Observação: Como pode ser observado na equação 4.33, o procedimento de calibração da priori não é regularizado pela Entropia Relativa, portanto, diferentes pontos de inicialização dos parâmetros do algoritmo nos levam a prioris diferentes. Por isso a importância da posteriori não variar de forma discrepante com relação a diferentes especificações da priori.

Os preços correspondentes ao modelo de Merton com os parâmetros ótimos especificados acima são:

k=6	30.695303612		0.105379861
$k=6+\frac{8}{21}$	7.419504981		0.053860788
$k=6+\frac{16}{21}$	5.774336900		0.033791314
...	5.037274637		0.006960955
	3.885433516		0.011440122
	2.762190108		0.004686971
	1.764781355		0.003989902
	1.052466219		0.004362760
	0.642033911		0.002392409
	0.340417046	...	0.002922290
	0.207787376	k = 14	0.002108602

Na figura 4.19, segue o gráfico dos preços ótimos encontrados em função dos preços de exercício:

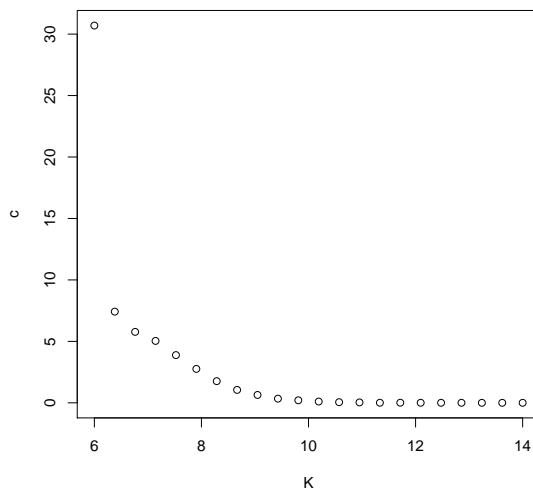


Figura 4.19: Preços gerados pela priori em função dos preços de exercício.

O formato da priori pode ser visto na figura 4.20.

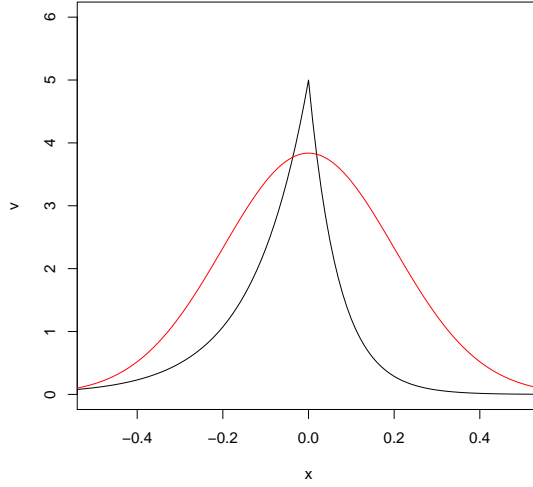


Figura 4.20: Em vermelho, a medida de Lévy a priori gerada a partir do modelo de Merton. Em preto, a medida de Kou.

As similaridades com o modelo paramétrico acabam aqui. Agora nós construiremos o método para a obtenção da medida de Lévy a posteriori não-paramétrica. Isso significa que não lidaremos mais com parâmetros de uma determinada medida de Lévy: estimaremos ponto a ponto a medida de Lévy a posteriori e depois interpolaremos esses pontos utilizando algum método razoável como a *spline cúbica* por exemplo.

Agora, a função a ser minimizada assumirá a forma:

$$J(\nu) = \sum_{i=1}^N \omega_i |C^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i) - C^*(T_i, K_i)|^2 + \alpha \xi(\nu), \quad (4.34)$$

sendo $\xi(\nu)$ a Entropia Relativa da medida risco-neutra com respeito à medida a priori. Sua forma é descrita na proposição 2.9.

Utilizaremos o algoritmo de minimização *optim* do software estatístico R que utiliza o método L-BFGS-B descrito em Byrd et al. (1995). Para podermos executar este algoritmo, precisamos da função a ser minimizada (descrita acima) e do seu gradiente. Neste método, o gradiente é calculado supondo preços como função de um vetor (ν_1, \dots, ν_M) que é obtida através da discretização da medida de Lévy em uma malha. Abaixo, desenvolvemos a expressão do gradiente:

$$\frac{\partial J(\nu)}{\partial \nu_j} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot \omega_i \cdot \|C^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i) - C^*(T_i, K_i)\| \cdot \left[\frac{\partial C^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i)}{\partial \nu_j} \right] + \alpha \frac{\partial \xi(\nu)}{\partial \nu_j}. \quad (4.35)$$

Como desenvolvido em Cont & Tankov (2004a):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i)}{\partial \nu_j} = \\ & = T e^{x_j} [C_T(\kappa - x_j) - C_T(\kappa)] - (e^{x_j} - 1) \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu \log(\kappa) - rT} \frac{\phi_T(u - i)}{1 + iu}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ou seja, o gradiente do preço da opção pode ser escrito em função do preço da opção e de um função auxiliar. Agora desenvolveremos a expressão para o gradiente da entropia relativa, lembrando que, pela proposição 2.9, a entropia relativa para o nosso modelo possui seguinte forma:

$$\xi(Q|P) = \frac{T}{2\sigma^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)(\nu^Q - \nu^P) dx \right\}^2 + T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \log\left(\frac{d\nu^Q}{d\nu^P}\right) + 1 - \frac{d\nu^Q}{d\nu^P} \right) \nu^P(dx). \quad (4.37)$$

Portanto, o seu gradiente possui a seguinte forma (lembrando que estamos discretizando as integrais para a aplicação computacional):

$$\frac{\partial \xi(\nu)}{\partial \nu_j} = \frac{T}{\sigma^2} \left\{ \left(\sum_x (e^x - 1)(\nu^Q - \nu^P) \right) \left(\sum_x (e^x - 1) \right) \right\} + T \sum_x \log\left(\frac{\nu^Q}{\nu^P}\right). \quad (4.38)$$

Com a função a ser minimizada e o seu gradiente em mãos, podemos efetuar a minimização utilizando o método L-BFGS-B.

Rodamos o algoritmo de minimização e obtivemos os seguintes preços gerados pela posteriori não-paramétrica obtida:

k=6	36.95712875		0.16887702
k=6+ $\frac{8}{21}$	9.97086995		0.14575185
k=6+ $\frac{16}{21}$	4.97280098		0.12284225
...	1.83557288		0.11192873
	1.07233231		0.08915409
	0.97303693		0.06324123
	0.63158149		0.04835164
	0.34123834		0.03334769
	0.15828357		0.02803184
	0.19844571	...	0.01822237
	0.22267369	k = 14	0.01514359

O gráfico dos preços gerados pela posteriori não-paramétrica em função dos preços de exercício pode ser visto a seguir:

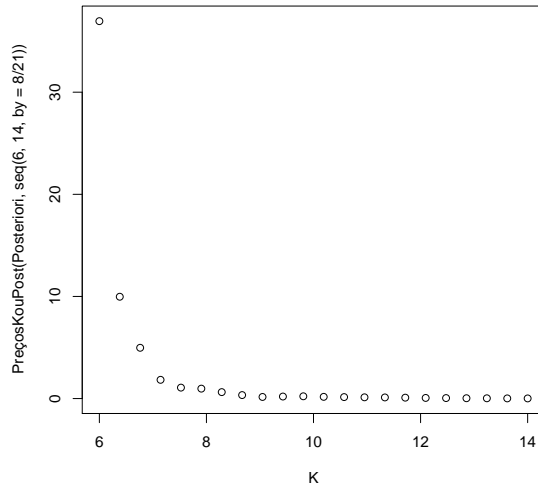


Figura 4.21: Preços gerados pela posteriori não paramétrica calibrada em função dos preços de exercício.

Os pontos da medida de Lévy a posteriori discretizada podem ser observados no gráfico abaixo:

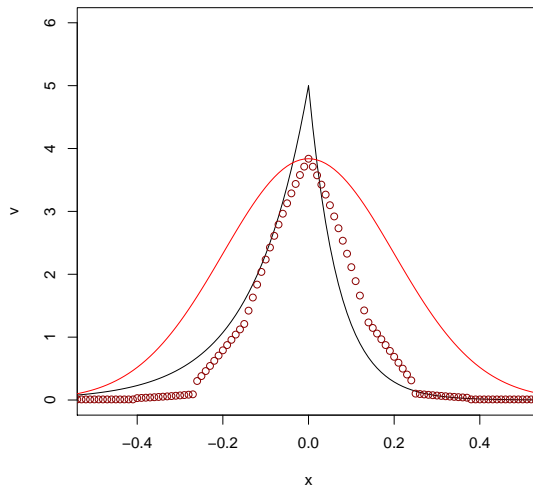


Figura 4.22: Em vermelho, a medida de Lévy a priori, em preto a medida de Kou e em vinho os pontos representam a medida de Lévy a posteriori calibrada.

Interpolando os pontos obtidos com o algoritmo de *spline cúbico* do R, obtivemos a seguinte medida de Lévy:

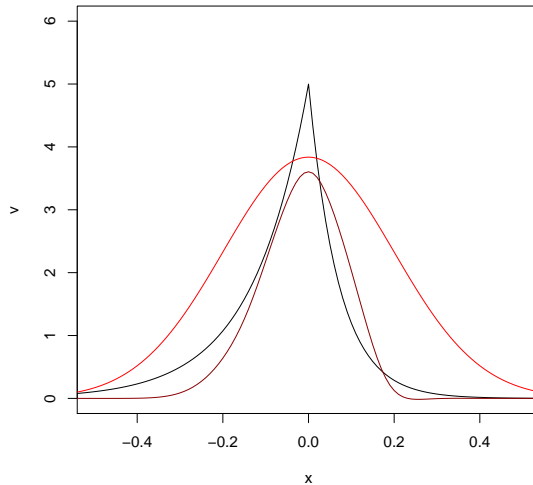


Figura 4.23: Em vinho, a medida de Lévy a posteriori após interpolação.

Observação: A medida de Lévy a posteriori obtida pelo algoritmo de calibração é discreta, já que o método de calibração utilizado precisa discretizar a medida de Lévy para gerar os preços das opções como descrito no apêndice. Daí usando a convergência em distribuição mencionada na pag.34, interpola-se para obtermos uma distribuição contínua aproximada.

As principais características da densidade verdadeira foram recuperadas com sucesso na abordagem não paramétrica. Percebemos na figura 4.23 que a medida de Lévy a posteriori recupera uma leve assimetria à esquerda da medida de Kou. A única região em que se pode perceber um erro razoável é próximo a zero. Como argumentado em Cont & Tankov (2004a), isso é devido a uma redundância entre pequenos saltos e a componente de difusão.

Verificaremos agora a eficiência do algoritmo de calibração quando escolhemos prioris não-informativas como a uniforme por exemplo. Nossa medida de Lévy a priori será a uniforme no intervalo $[-1,1]$, com intensidade $\lambda = 1.5$ e coeficiente de volatilidade $\sigma = 0.1$.

Aplicando novamente o algoritmo de calibração, obtivemos a seguinte posteriori após a interpolação:

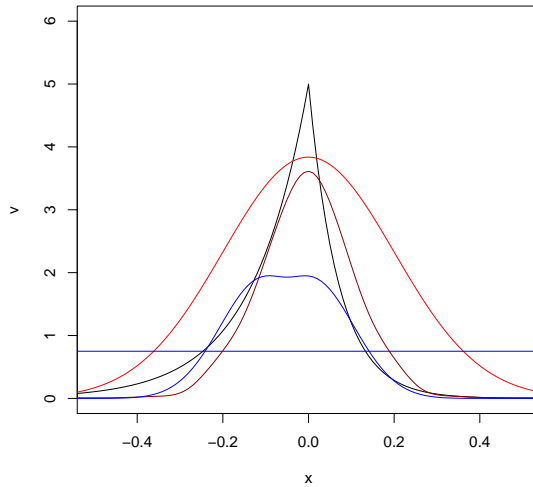


Figura 4.24: Medida de Lévy a posteriori calibrada considerando a priori uniforme (ambas em azul) em comparação com a posteriori obtida (em vinho) ao considerarmos a priori segundo o modelo de Merton (em vermelho).

Os preços gerados pelo modelo de Kou e os preços gerados pela posteriori obtida podem ser observados nas duas tabelas a seguir:

Preços Kou

k=6	37.03038144		0.13248088
$k=6+\frac{8}{21}$	9.39955481		0.09838927
$k=6+\frac{16}{21}$	3.88547283		0.07312757
...	1.87356260		0.05975348
	1.25650603		0.04122184
	0.83152836		0.03683136
	0.56384071		0.02458736
	0.43602755		0.02308244
	0.29170541		0.01599519
	0.24013854	...	0.01479612
	0.16559443	k = 14	0.01129937

Preços posteriori

k=6	42.141016997		0.161237852
$k=6+\frac{8}{21}$	6.927226072		0.119062551
$k=6+\frac{16}{21}$	3.961696713		0.072301097
...	2.019487883		0.054239655
	1.481629548		0.030765020
	1.172267295		0.024409740
	0.989609768		0.012489963
	0.698501746		0.011067194
	0.520269239		0.004710174
	0.341842841	...	0.005147479
	0.251991305	k = 14	0.001536210

O gráfico com a relação expressa na tabela acima pode ser visto abaixo:

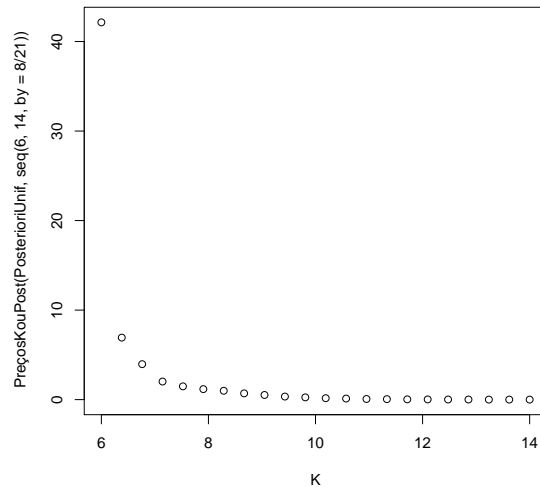


Figura 4.25: Preços gerados pela nova posteriori obtida.

A figura 4.24 e a comparação entre os preços gerados pela nova posteriori obtida e os preços de Kou demonstram que o modelo não consegue recuperar a medida de Lévy com perfeição quando consideramos prioris uniformes. Este fato é comentado em Cont & Tankov (2004b) onde os autores argumentam que os valores exatos dos parâmetros da priori não são importantes, no entanto é crucial determinar o formato correto para a priori.

Ao reiterarmos o método, ou seja ao considerarmos essa posteriori obtida como uma nova priori, conseguimos uma boa aproximação dos preços gerados pelo modelo de Kou assim como da medida de Lévy. Os preços obtidos pela posteriori reiterada e o seu gráfico estão expressos abaixo:

Preços posteriori reiterada

k=6	37.67825157		0.20075672
$k=6+\frac{8}{21}$	9.78782862		0.16889317
$k=6+\frac{16}{21}$	4.91311476		0.12166936
...	1.92765156		0.10110307
	1.03516110		0.07520538
	0.58850173		0.06059648
	0.42356740		0.04688193
	0.33176216		0.03433938
	0.29091458		0.02681764
	0.28909715	...	0.01719843
	0.26031805	k = 14	0.01371874

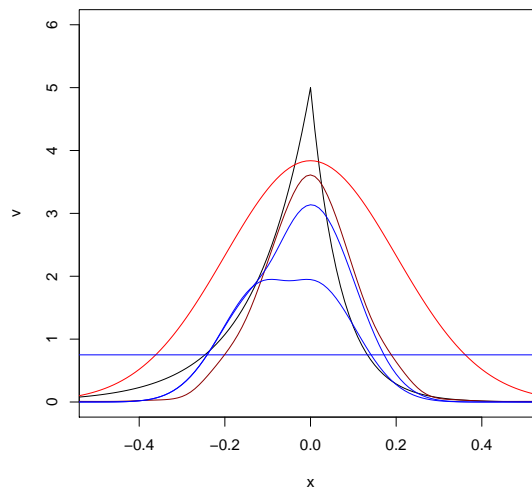


Figura 4.26: Priori uniforme e posterioris reiteradas (em azul). Em vermelho a priori considerando o modelo de Merton e em vinho a posteriori considerando o modelo de Merton. Em preto a medida de Kou.

4.6 Calibração não-paramétrica (Dados reais)

Nesta seção, nós tentaremos recuperar a medida de Lévy não-paramétrica a partir de contratos reais do mercado. Como mencionado no caso paramétrico, nós obtivemos no site da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) preços de opções de compra da Petrobras na data 08/10/2010 com vencimento em 7 semanas. O valor da ação da Petrobras (Petr4) nesta data era 26,00 reais e existiam 19 preços de exercícios disponíveis para esta data além dos seus preços de Bid e de Ask. A taxa de juros utilizada foi

$r = 0.5\%a.m..$

As três tabelas abaixo contém respectivamente os preços da opção, os preços de Bid e os preços de Ask obtidos:

Preços da opção:

k = 21.83	4.59	k = 37.43	0.04
k = 23.83	3.03	k = 39.43	0.02
k = 25.00	2.19	k = 42.00	0.02
k = 26.00	1.65	k = 43.43	0.01
k = 27.83	0.85	k = 46.00	0.01
k = 29.00	0.53	k = 48.00	0.01
k = 29.43	0.45	k = 49.43	0.01
k = 30.83	0.25	k = 52.00	0.01
k = 31.83	0.19		
k = 33.43	0.12		
k = 35.43	0.07		

Preços Bid (representam as ofertas de quem quer comprar a opção):

k = 21.83	4.11	k = 37.43	0.04
k = 23.83	2.80	k = 39.43	0.02
k = 25.00	1.85	k = 42.00	0.01
k = 26.00	1.65	k = 43.43	0.01
k = 27.83	0.85	k = 46.00	0.01
k = 29.00	0.42	k = 48.00	0.01
k = 29.43	0.44	k = 49.43	0.01
k = 30.83	0.25	k = 52.00	0.01
k = 31.83	0.18		
k = 33.43	0.10		
k = 35.43	0.07		

Preços Ask (representam as ofertas de quem quer vender a opção):

k = 21.83	4.75	k = 37.43	0.05
k = 23.83	3.15	k = 39.43	0.04
k = 25.00	6.69	k = 42.00	0.03
k = 26.00	1.70	k = 43.43	0.03
k = 27.83	0.87	k = 46.00	0.03
k = 29.00	0.55	k = 48.00	0.02
k = 29.43	0.45	k = 49.43	0.02
k = 30.83	0.38	k = 52.00	0.02
k = 31.83	0.19		
k = 33.43	0.12		
k = 35.43	0.08		

Na figura 4.27, se encontra o gráfico dos preços da opção em função dos preços de exercício.

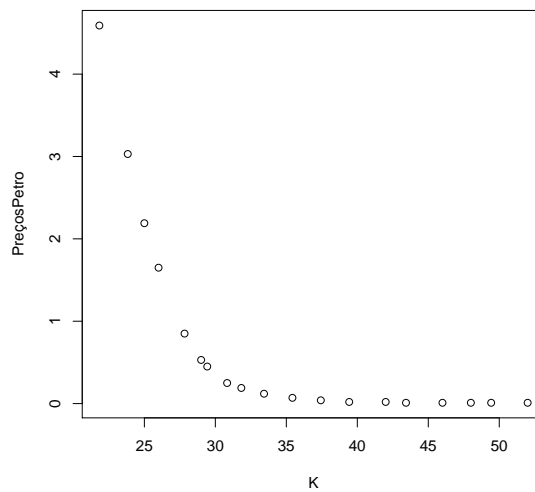


Figura 4.27: Relação entre os preços da opção e os preços de exercício.

Novamente, seguiremos o algoritmo para encontrarmos os parâmetros que definem a priori que é do tipo Merton. Como já discutido, o peso de cada preço será proporcional ao intervalo Bid-Ask. Aplicando o algoritmo nós obtivemos os seguintes parâmetros:

σ	θ	Δ
0.6140752	2.2745632	0.3722147

Os preços gerados por essa priori estão na tabela a seguir:

k = 21.83	1.499373585	k = 37.43	0.032881364
k = 23.83	1.301212456	k = 39.43	0.014319398
k = 25.00	0.707691470	k = 42.00	0.008652148
k = 26.00	1.156505378	k = 43.43	0.003144449
k = 27.83	0.772507320	k = 46.00	0.001112437
k = 29.00	0.487013420	k = 48.00	0.001708706
k = 29.43	0.481728499	k = 49.43	0.001351014
k = 30.83	0.377960874	k = 52.00	0.001018978
k = 31.83	0.268578530		
k = 33.43	0.167478240		
k = 35.43	0.085574009		

A priori pode ser vista na figura abaixo:

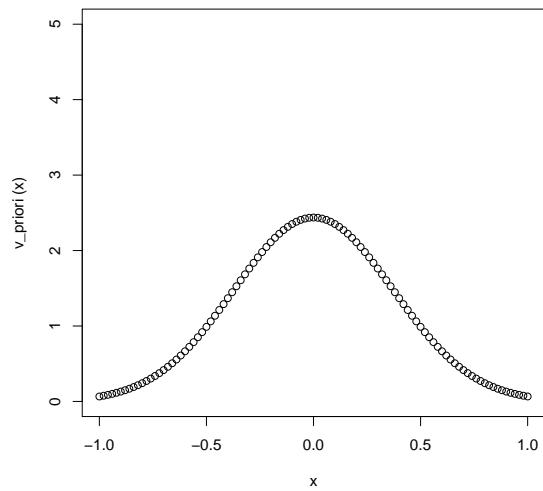


Figura 4.28: Medida de Lévy a priori.

O gráfico da medida de Lévy a posteriori e a sua relação com a priori podem ser observados na figura abaixo:

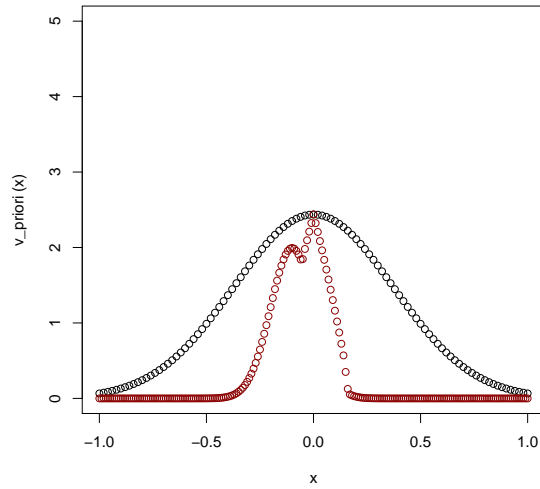


Figura 4.29: Medida de Lévy a posteriori.

Os preços gerados pela medida de Lévy a posteriori obtida estão expressos na tabela a seguir:

k = 21.83	4.97539866	k = 37.43	0.01035156
k = 23.83	1.30154506	k = 39.43	0.01158273
k = 25.00	0.76285853	k = 42.00	0.01584382
k = 26.00	0.33411942	k = 43.43	0.02650630
k = 27.83	0.12938221	k = 46.00	0.02605975
k = 29.00	0.06820943	k = 48.00	0.02822803
k = 29.43	0.05721506	k = 49.43	0.02822803
k = 30.83	0.04713305	k = 52.00	0.02392223
k = 31.83	0.04195070		
k = 33.43	0.04609325		
k = 35.43	0.02107849		

A relação expressa na tabela pode ser observada graficamente na figura a seguir:

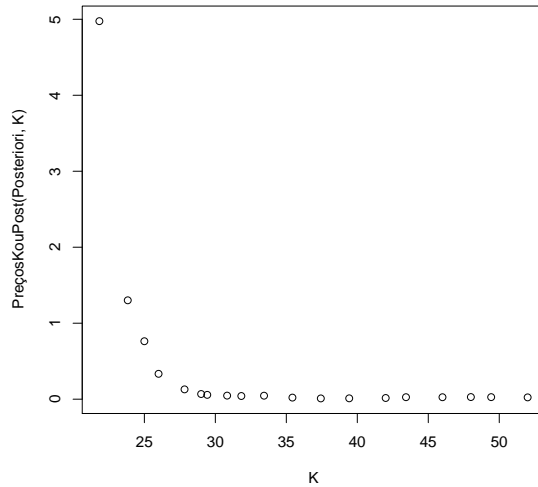


Figura 4.30: Relação entre os preços da opção gerados pela posteriori e os preços de exercício.

Observando a figura 4.29, nós temos indícios de que a medida de Lévy calibrada através de preços de contratos de opções de compra européias do mercado possui as seguintes características:

- (1) A medida a posteriori calibrada é assimétrica: a cauda esquerda é mais pesada do que a direita;
- (2) A medida calibrada é bimodal, com uma moda em zero e a outra em um ponto negativo.

Assim, temos evidências de que conseguimos recuperar a medida de Lévy não-paramétrica pelo método proposto em Cont & Tankov (2004b), e percebemos que os contratos de opção de compra européias brasileiros, neste trabalho a opção de compra da Petrobras, possuem características semelhantes aos contratos de opção de compra européia da bolsa alemã (DAX) cujos resultados da calibração da medida de Lévy aparecem bem descritos em Cont & Tankov (2004a).

4.7 Propriedades da solução

Como proposto em Cont & Tankov (2004b), para implementar o algoritmo de calibração da medida de Lévy, nós discretizaremos a medida de Lévy em uma malha. Isto é feito localizando a medida de Lévy em um intervalo limitado $[-M, M]$ e depois escolhendo uma partição $\pi = (-M = x_1 < \dots < x_N = M)$ deste intervalo. Considere L_π o conjunto de medidas de Lévy com suporte em π :

$$L_\pi = \left\{ \sum_{x \in \pi} a(x) \delta_x, a \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

sendo δ_x a medida de Dirac concentrada em x . Identifica-se claramente L_π com \mathbb{R}_+^N , logo sobre L_π estaremos considerando a topologia induzida por esta identificação.

Para simplificar a notação, escreveremos $\nu_i = \nu(\{x_i\})$, $i = 1, 2, \dots, N$ e $\nu \in L_\pi$.

Nesta seção, demonstraremos a proposição a seguir além de algumas outras propriedades da solução do problema de calibração. Primeiramente, mostraremos a continuidade da função a ser minimizada $J(\nu)$ em L_π . A partir daí, estabeleceremos um limite inferior para a entropia relativa. Isso nos permitirá mostrar que o mínimo da função $J(\nu)$ é alcançado em um subconjunto limitado de L_π . Depois mostraremos que, para α grande o suficiente, essa solução é única.

Proposição 4.1 (Regularidade da solução após a discretização). *Para qualquer partição π de $[-M, M] \in \mathbb{R}$ o problema discretizado admite uma solução:*

$$\exists \nu \in L_\pi \text{ tal que } J(\nu^\pi) = \min_{\nu \in L_\pi} J(\nu).$$

Além disso, se o coeficiente de volatilidade for não-nulo, para α grande o suficiente esta solução é única.

Demonstração. Continuidade da entropia relativa:

Considere a proposição 2.9, para modelos de Lévy exponenciais, na qual a entropia relativa assume a seguinte forma:

$$\xi(\nu) = \frac{T}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^N (e^{x_i} - 1)(\nu_i - \nu_i^P) \right\}^2 + T \sum_{i=1}^N \left\{ \nu_i \ln\left(\frac{\nu_i}{\nu_i^P}\right) + \nu_i^P - \nu_i \right\}. \quad (4.39)$$

O primeiro termo é contínuo porque ele é uma função (quadrática) de uma soma finita de funções contínuas e lineares de ν_i . Para analisarmos o segundo termo considere a função $f(x) = x \ln(x/x_0) + x_0 - x$. Ela é contínua para $x \geq 0$ se definirmos $f(0) = x_0$. Portanto, o segundo termo é contínuo em $\nu_i, \forall i$.

Continuidade do erro de apreçamento:

Para estabelecer a continuidade da função do erro de apreçamento, é suficiente provar que o preço da opção é uma função contínua da medida de Lévy, ou, de forma equivalente, provar que o valor no tempo $z_T(\kappa, \nu)$ definido no apêndice, é contínuo para todo κ . Sejam ν^1 e ν^2 duas medidas de Lévy em $L(\pi)$ e $\varepsilon > 0$. Nós provaremos que existe um $\delta > 0$ tal que se $\max_i |\nu_i^1 - \nu_i^2| < \delta$, então $|z_T(\kappa, \nu^1) - z_T(\kappa, \nu^2)| < \varepsilon$. A partir das equações A.8 e A.10 do apêndice obtemos:

$$\begin{aligned}
|z_T(\kappa, \nu^1) - z_T(\kappa, \nu^2)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_T(u, \nu^1) - \zeta_T(u, \nu^2)| du \\
&\leq e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\phi^{\nu^1}(u-i) - \phi^{\nu^2}(u-i)|}{|u|\sqrt{1+u^2}} du,
\end{aligned}$$

para todo κ . Pela fórmula da função característica nós obtemos que $\phi^\nu(u-i) \leq e^{rT}$ para toda ν . Portanto, é possível encontrar um número real A tal que:

$$e^{-rT} \int_{|u| \geq A} \frac{|\phi^{\nu^1}(u-i) - \phi^{\nu^2}(u-i)|}{|u|\sqrt{1+u^2}} du \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Relembrando que $\phi^\nu(u) = \exp(T\psi^\nu(u))$ e utilizando o limite superior para o módulo de ϕ conjuntamente com o teorema do valor médio, obtemos:

$$\begin{aligned}
e^{-rT} \int_{|u| \leq A} \frac{|\phi^{\nu^1}(u-i) - \phi^{\nu^2}(u-i)|}{|u|\sqrt{1+u^2}} du &\leq \int_{|u| \leq A} \frac{|\phi^{\nu^1}(u-i) - \phi^{\nu^2}(u-i)|}{|u|\sqrt{1+u^2}} du \\
&\leq \sum_{j=1}^N |e^{x_j} - 1| |\nu_j^1 - \nu_j^2| \int_{u \leq A} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} + \sum_{j=1}^N e^{x_j} |\nu_j^1 - \nu_j^2| \int_{u \leq A} \frac{|e^{iux_\kappa} - 1|}{|u|\sqrt{1+u^2}}.
\end{aligned}$$

Como todas as integrais do último termo são integrais de funções limitadas em domínios limitados, pode-se escolher $\delta > 0$ tal que se $\max_i |\nu_i^1 - \nu_i^2| < \delta$ então o último termo é menor do que $\epsilon/2$ e portanto $|z_T(\kappa, \nu^1) - z_T(\kappa, \nu^2)|$ é menor do que ϵ . Isso prova a continuidade da função de preços uniformemente em κ .

Limite inferior para a função regularizada:

Considere a seguinte desigualdade:

$$x \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + x_0 - x \geq x - x_0(e-1).$$

Ela nos permite estabelecer um limite inferior para a função $J(\nu)$, através de $\xi(\nu)$:

$$J(\nu) \geq \alpha \xi(\nu) \geq \alpha T \sum_{i=1}^N \nu_i - \alpha T(e-1) \sum_{i=1}^N \nu_i^P. \quad (4.40)$$

Portanto, a função regularizada é limitada inferiormente pela norma L^1 de ν menos uma constante, multiplicada pela norma L^1 de ν^P

Existência de solução para o problema regularizado:

Para provarmos que existe solução para o problema regularizado, considere $C \subset L_\pi$ definido a seguir:

$$C = \left\{ \nu : \alpha T \sum_{i=1}^N \nu_i \leq \alpha T(e-1) \sum_{i=1}^N \nu_i^P + J(\nu^P) + 1 \right\}.$$

Observe que C é compacto em L_π , logo, como J é contínuo,

$$\exists \nu^* \in L_\pi \text{ tal que } J(\nu^*) = \inf_{\nu \in C} J(\nu).$$

No entanto, utilizando o limite inferior para toda $\nu \in L_\pi - C$ nós verificamos pela definição de C e pela desigualdade na fórmula 4.54 que $J(\nu) \geq J(\nu^P) + 1$. Além disso, $J(\nu^P) + 1 \geq J(\nu^P) \geq \alpha \xi(\nu^P)$, então $\nu^P \in C$, logo $J(\nu^P) \geq J(\nu^*)$. Portanto, ν^* é a solução para o problema regularizado.

Unicidade da solução para α grande:

Iremos supor que o coeficiente de volatilidade σ é maior que zero. Mostraremos que para qualquer conjunto compacto \hat{C} existe um α_0 tal que para qualquer $\alpha > \alpha_0$, $J(\nu)$ é convexo em \hat{C} . Como o tamanho do conjunto C apresentado diminui quando α cresce, isso nos leva à unicidade da solução para $\alpha > \alpha_0$.

Considere a função regularizada $J(\nu) = \alpha \xi(\nu) + \epsilon(\nu)$, sendo $\epsilon(\nu)$ a soma dos quadrados dos erros dos preços. A partir da fórmula para a entropia relativa obtemos:

$$\xi^{jk} \equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial \nu_j \partial \nu_k} = \frac{T}{a} (e^{x_j} - 1)(e^{x_k} - 1) + \frac{T}{\nu_j} \delta_{jk}. \quad (4.41)$$

Suponhamos que a segunda derivada de $\epsilon(\nu)$ possa ser representada da seguinte forma:

$$\epsilon^{jk} \equiv \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \nu_j \partial \nu_k} = P^{jk} + B^{jk}, \quad (4.42)$$

sendo P uma matriz positiva definida e os elementos de B são limitados por uma constante c . Isto será provado adiante.

Seja $\hat{C} = \nu : \nu_i \leq \nu_0$, para algum $\nu_0 > 0$. Então, para todo $\alpha > \frac{Nc\nu_0}{T}$, J é convexo em \hat{C} , já que para cada vetor $\Delta \nu$ e para cada $\nu \in \hat{C}$:

$$\begin{aligned} \sum_{jk} \frac{\partial^2 J(\nu)}{\partial \nu_j \partial \nu_k} \Delta \nu_j \Delta \nu_k &= \frac{\alpha T}{a} \left(\sum_j (e^{x_j} - 1) \Delta \nu_j \right)^2 \\ &\quad + \alpha T \sum_j \frac{\Delta \nu_j^2}{\nu_j} + \sum_{jk} (P^{jk} + B^{jk}) \Delta \nu_j \Delta \nu_k \\ &\geq \alpha T \sum_j \frac{\Delta \nu_j^2}{\nu_j} + \sum_{jk} (B^{jk}) \Delta \nu_j \Delta \nu_k \geq \alpha T \sum_j \frac{\Delta \nu_j^2}{\nu_0} + Nc \sum_j \Delta \nu_j^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, a matriz Hessiana de J é positiva definida e J é convexa, veja Lima (2004) seção 8 do capítulo 3.

Agora provaremos a representação da segunda derivada de $\epsilon(\nu) = (C(\nu) - C_0)^2$.

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \nu_j \partial \nu_k} = 2 \frac{\partial C(\nu)}{\partial \nu_j} \frac{\partial C(\nu)}{\partial \nu_k} + 2(C(\nu) - C_0) \frac{\partial^2 C(\nu)}{\partial \nu_j \partial \nu_k}. \quad (4.43)$$

O primeiro termo da expressão acima é uma matriz positiva definida, assim precisamos provar que o segundo termo é limitado. Como o preço da opção é sempre limitado superiormente pelo preço da ação basta provarmos que $\frac{\partial^2 C(\nu)}{\partial \nu_j \partial \nu_k}$ é limitado, ou, de forma equivalente, $\frac{\partial^2 z(\nu)}{\partial \nu_j \partial \nu_k}$. Pela fórmula A.8 do valor no tempo da opção temos que:

$$\frac{\partial^2 z(\nu)}{\partial \nu_j \partial \nu_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\kappa} \frac{\partial^2 \zeta_\nu(u)}{\partial \nu_j \partial \nu_k} du. \quad (4.44)$$

Portanto, para $z(\nu)$ ser limitado, ζ_ν deve ser integrável uniformemente em ν . Pela expressão de $\zeta_\nu(\nu)$, isto é equivalente à integrabilidade uniforme do seguinte termo:

$$\left| \frac{\partial^2 \phi(u - i)}{u(1 + iu) \partial \nu_k \partial \nu_j} \right|. \quad (4.45)$$

Pela fórmula de Lévy-Khintchine:

$$\phi_T(u - i) = e^{T\psi(u - i)},$$

sendo

$$\psi(u - i) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 iu + iur + r - iu \sum_j (e^{x_j} - 1)\nu_j + \sum_j e^{x_j} (e^{iux_j} - 1)\nu_j.$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \phi(u - i)}{\partial \nu_k \partial \nu_j} = T^2 \phi(u - i) \frac{\partial \psi(u - i)}{\partial \nu_k} \frac{\partial \psi(u - i)}{\partial \nu_j}, \quad (4.46)$$

já que:

$$\frac{\partial \psi(u - i)}{\partial \nu_j} = -iu(e^{x_j} - 1) + e^{x_j}(e^{iux_j} - 1), \quad (4.47)$$

termo que é limitado por polinômios independente de ν . Como $|\phi_T(u - i)| \leq e^{r-1/2\sigma^2 u^2}$, a integral é limitada por um número que não depende de ν , o que completa a prova. \square

Agora apresentaremos algumas propriedades da solução do problema regularizado no caso discreto, já que este caso é o que nos interessa do ponto de vista da implementação numérica.

Proposição 4.2. *Seja $\alpha > 0$ e $\{C^k\}$ e $\{\nu^k\}$ sequências tais que $C^k \rightarrow C^*$ e ν^k é tal que*

$$\sum_{i=1}^N \omega_i |C^{\nu^k}(t=0, S_0, T_i, K_i) - C^*|^2 + \alpha \xi(\nu^k) =$$

$$\min_{\nu \in L_\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i |C^\nu(t=0, S_0, T_i, K_i) - C^*|^2 + \alpha \xi(\nu).$$

Então existe uma subsequência convergente de ν^k e o limite de cada subsequência convergente é uma solução para a equação 4.5.

Observação: Se a solução for única, isto equivale à definição de continuidade.

Demonstração. Para simplificar a notação, consideraremos $F(\nu)$ um conjunto de modelos de preços e $|F(\nu) - C^*|^2$ a soma dos quadrados da diferença entre os preços correspondentes à medida ν e os preços de mercado C^* . Seja $\{C^k\}$ uma sequência de preços convergindo para C^* e $\{\nu_k\}$ a seguinte sequência de soluções:

$$|F(\nu_k) - C_k|^2 + \alpha \xi(\nu_k) = \inf_{\nu \in L_\pi} \{|F(\nu) - C_k|^2 + \alpha \xi(\nu)\}.$$

Observe que:

$$|F(\nu_k) - C_k|^2 + \alpha \xi(\nu_k) \leq |F(\nu^*) - C_k|^2 + \alpha \xi(\nu^*) \leq$$

$$\leq 2|F(\nu^*) - C^*|^2 + 2|C^* - C_k|^2 + \alpha \xi(\nu^*) \leq M.$$

M não depende de k já que $C_k \rightarrow C^*$.

Portanto, as sequências $|\nu_k|$ e $|F(\nu_k)|$ são limitadas. Como nós estamos em um espaço finito-dimensional, é possível encontrar uma subsequência convergente $\nu_m \rightarrow \nu^*$ de $\{\nu_k\}$. Considere $\{\nu_m\}$ qualquer subsequência convergente. Usando a continuidade da função de apreçamento, obtemos que $F(\nu_m) \rightarrow F(\nu^*)$. Utilizando este fato, conjuntamente com a continuidade da entropia relativa e a desigualdade acima obtemos:

$$\forall \nu \in L(\mathbb{R}), |F(\nu^*) - C^*|^2 + \alpha \xi(\nu^*) = \lim \{|F(\nu_m) - C_m|^2 + \alpha \xi(\nu_m)\}$$

$$\leq \lim \{|F(\nu) - C_m|^2 + \alpha \xi(\nu)\} = |F(\nu) - C^*|^2 + \alpha \xi(\nu)$$

Portanto, nós provamos que ν^* minimiza a expressão $|F(\nu) - C^*|^2 + \alpha \xi(\nu)$. \square

Considere M o conjunto de medidas de Lévy discretizadas que são soluções para o problema de mínimos quadrados e considere que:

$$\exists \nu \in M, \xi(Q_{(\sigma, \nu)}, Q_0) \leq \infty.$$

Então, uma solução de mínimos quadrados mínima entropia é definida como a solução de:

$$\inf_{\nu \in M} \xi(Q_{(\sigma, \nu)}, Q_0).$$

A proposição a seguir nos revela a convergência para a solução de mínimos quadrados mínima entropia quando o nível do erro δ decresce.

Proposição 4.3. *Suponha que o problema de calibração com dados C^* admita uma solução de mínimos quadrados mínima entropia ν^* . Considere $|C^* - C| \leq \delta$ e $\alpha(\delta)$ tal que $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ e $\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$.*

Então toda sequência $\left\{ \nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \right\}$, com $\delta_k \rightarrow 0$ e $\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}$ solução da equação de mínimos quadrados com dados C_{δ}^ possui uma subsequência convergente. O limite de toda subsequência convergente é a solução de mínimos quadrados mínima entropia. Se a solução de mínima entropia mínimos quadrados ν^* é única, então:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \nu_{\alpha(\delta)}^{\delta} \right\} = \nu^*.$$

Demonstração. Primeiramente provaremos que $\left\{ \nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \right\}$ é relativamente compacto em L_{π} . Considere as sequências $\left\{ \nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \right\}$ e δ_k como acima, e ν^* a solução de mínimos quadrados mínima entropia. Então pela definição de $\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}$ temos que:

$$|F(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) - C_{\delta_k}^*|^2 + \alpha(\delta_k)\xi(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) \leq |F(\nu^*) - C_{\delta_k}^*|^2 + \alpha(\delta_k)\xi(\nu^*).$$

Utilizando a seguinte desigualdade:

$$\forall r > 0, (1-r)x^2 + (1-1/r)y^2 \leq (x+y)^2 \leq (1+r)x^2 + (1+1/r)y^2,$$

obtemos:

$$|F(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) - C^*|^2(1-r) + \alpha(\delta_k)\xi(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) \leq |F(\nu^*) - C^*|^2(1+r) + 2\delta_k^2/r + \alpha(\delta_k)\xi(\nu^*),$$

o que implica que para todo $r \in (0, 1)$:

$$\alpha(\delta_k)\xi(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) \leq 2r|F(\nu^*) - C^*|^2 + 2\delta_k^2/r + \alpha(\delta_k)\xi(\nu^*).$$

Tomando $r = \delta_k$ obtemos:

$$\xi(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) \leq 2\delta_k/\alpha(\delta_k)(1 + |F(\nu^*) - C^*|^2) + \xi(\nu^*),$$

e, portanto:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \xi(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) \right\} \leq \xi(\nu^*).$$

Portanto, $\xi(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k})$ é limitado e com isso $\left\{ \nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \right\}_{k \geq 1}$ possui uma subsequência convergente. Seja $\left\{ \nu_{\alpha(\delta_m)}^{\delta_m} \right\}_{m \geq 1}$ qualquer subsequência convergente para uma medida ν . Substituindo $r = \delta_k$ e fazendo $k \rightarrow \infty$ nos leva a:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |F(\nu_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}) - C^*| = |F(\nu^*) - C^*|.$$

Este fato, junto com a continuidade da função de calibração, implica que ν é uma solução de mínimos quadrados mínima entropia. \square

Referências Bibliográficas

- AGUIAR, A. (2004). Estratégia de oferta de geradoras em leilões de contratação de energia, dissertação de mestrado.
- APPLEBAUM, D. (2004). *Lévy processes and Stochastic calculus*. Cambridge University Press.
- BELLAMY, N. & JEANBLANC, M. (1999). Incompleteness of markets driven by mixed diffusion. *Finance and Stochastics* 4 209–222.
- BYRD, R., LU, P. & NOCEDAL, J. (1995). A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on scientific and statistical computing* 16 1190–1208.
- CARR, P. & MADAN, D. (1999). Option valuation using the fast fourier transform. *Journal of computational finance* 3 463–520.
- CONT, R. & TANKOV, P. (2004a). *Financial modelling with jump processes*. Chapman e Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- CONT, R. & TANKOV, P. (2004b). Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models. *Journal of Computational Finance* 7 1–49.
- CONT, R. & TANKOV, P. (2006). Retrieving lévy processes from option prices: regularization of an ill-posed inverse problem. *SIAM, Journal on Control and Optimization* 45 1–25.
- DELBAEN, F. & SCHACHERMAYER, W. (1994). *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*.
- DUPIRE, B. (1994). Pricing with a smile. *RISK*, 7 18–20.
- EBERLEIN, E. & JACOD, J. (1997). On the range of option prices. *Finance and Stochastics* 1.
- FÖLLMER, H. & SCHIED, A. (2002). *Stochastic Finance*. De Gruyter, Berlin.
- HODGES, S. & NEUBERGER, A. (1989). Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of future markets* 8 222–239.

- KARATZAS, I. & SHREVE, S. (1991). *Brownian Motion and Stochastic calculus*. Springer Finance Series.
- KARATZAS, I. & SHREVE, S. (1999). *Methods of mathematical finance*. Springer Finance Series.
- KOU, S. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science* 48 1086–1101.
- LIMA, E. (2004). *Curso de análise, vol. 2*. Coleção matemática universitária, IMPA.
- MERTON, R. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3 125–144.
- OKSENDAL, B. (1998). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Finance Series.
- RUDIN, W. (1974). *Real and Complex analysis*. Mc. Graw Hill, New York.
- SAPORITO, Y. (2009). Modelos de volatilidade para o mercado financeiro, dissertação de mestrado.
- SATO, K. I. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press.
- SHREVE, S. (2004). *Stochastic calculus for finance, continuous time, vol. 2*. Springer Finance Series.
- TARGINO, R. (2010). Teoremas de não arbitragem em mercados regidos pelo movimento browniano fracionário, dissertação de mestrado.

Apêndice A

Apreamento de opções pela transformada rápida de Fourier

Nesta seção, desenvolveremos a fórmula para o preço de uma opção europeia a partir de um modelo de Lévy exponencial como apresentado em Carr & Madan (1999). Consideremos um trio de Lévy (σ, γ, ν) . Uma vez obtida a expressão do preço em função da medida de Lévy ν e do coeficiente de volatilidade σ , poderemos executar o algoritmo de minimização proposto. Esse método pode ser aplicado sempre que a função característica possuir uma forma analítica. Felizmente, processos de Lévy são infinitamente divisíveis, e isto ocorre.

Considere κ como o logaritmo do preço de exercício K , e $C_T(\kappa)$ o valor de uma opção de compra europeia com maturidade T e cujo preço de exercício seja $\exp(\kappa)$. Além disso, consideremos que a densidade (sob a medida risco-neutra) do logaritmo do preço seja dada por $q_T(s)$. Pela fórmula de Lévy-Khintchine, sua função característica pode ser expressa como:

$$\phi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds = \exp \left\{ i\gamma u - \sigma^2 u^2 / 2 + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp\{ius\} - 1 - ius 1_{|s| < 1}) \nu(ds) \right\}.$$

Como sabemos, o valor da opção $C_T(\kappa)$ está relacionada com a densidade risco-neutra $q_T(s)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_T(\kappa) &= e^{-rT} E^{(\sigma, \gamma, \nu)} [(S_T - K)_+] = e^{-rT} E^{(\sigma, \gamma, \nu)} [(e^{\log(S_T)} - e^{\log(K)})_+] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^\kappa)_+ q_T(s) ds = \int_{\kappa}^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^\kappa) q_T(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Repare que $C_T(\kappa)$ tende para S_0 quando $\kappa \rightarrow -\infty$ e, portanto, $C_T(\kappa)$ não é quadrado integrável. Para obter uma função quadrado integrável, nós consideraremos o preço da opção de compra modificado $c_T(\kappa)$:

$$c_T(\kappa) = \exp(\alpha\kappa) C_T(\kappa),$$

sendo $\alpha > 0$.

Desta forma, ao garantir que $c_T(\kappa)$ é quadrado integrável, o que ocorre para valores pequenos de α , sua transformada de Fourier

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\kappa} c_T(\kappa) d\kappa, \mu \in \mathbb{R},$$

existe e é também uma função de quadrado integrável.

Primeiro, desenvolveremos uma expressão analítica para $\psi_T(u)$ em termos de ϕ_T e depois obteremos os preços das opções numericamente utilizando a transformada inversa de Fourier:

$$C_T(\kappa) = \frac{\exp(-\alpha\kappa)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\kappa} \psi_T(u) du = \frac{\exp(-\alpha\kappa)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iu\kappa} \psi_T(u) du. \quad (\text{A.2})$$

A expressão para determinar ψ_T é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\kappa} \int_{\kappa}^{\infty} e^{\alpha\kappa - rT} (e^s - e^{\kappa}) q_T(s) ds d\kappa \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_{-\infty}^s (e^{\alpha\kappa + s} - e^{(1+\alpha)\kappa}) e^{iu\kappa} d\kappa ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left(\frac{e^{(\alpha+1+iu)s}}{\alpha + iu} - \frac{e^{(\alpha+1+iu)s}}{\alpha + 1 + iu} \right) ds \\ &= \frac{e^{-rT} \phi_T(u - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Note que, quando $\alpha = 0$, o denominador zera se $u = 0$, induzindo a uma singularidade. Esta é uma razão para se usar o fator $\exp(\alpha\kappa)$.

Agora discutiremos a escolha do coeficiente α . Valores positivos de α auxiliam na integrabilidade. Uma condição suficiente para o valor modificado da opção de compra ser integrável com respeito ao logaritmo do preço de exercício é $\psi(0)$ ser finito. Mas, pela equação acima, $\psi(0)$ é finito se $\phi_T(-(\alpha + 1)i)$ for finito. Pela função característica, dada pela fórmula de Lévy-Khintchine, isso ocorrerá se:

$$\phi_T(-(\alpha + 1)i) = E[S_T^{\alpha+1}] < \infty.$$

Como procedimentos computacionais só executam somas finitas, precisamos truncar a integral na fórmula do preço e avaliar qual é a magnitude do erro deste truncamento (o computador só executa somas finitas). Repare que:

$$|\psi_T(u)| \leq \frac{E[S_T^{\alpha+1}]}{(\alpha^2 + \alpha - u^2)^2 + (2\alpha + 1)^2 u^2} \leq \frac{E[S_T^{\alpha+1}]}{u^4}. \quad (\text{A.4})$$

Segue que nós podemos limitar a integral da cauda superior por:

$$\int_a^\infty |\psi_T(u)| du < \sqrt{E[S_T^{\alpha+1}]/a}.$$

Este limite permite que nós possamos criar um procedimento para truncar a integral. Especificamente, o erro deste procedimento é limitado por:

$$\frac{\exp(-\alpha\kappa)}{\pi} \frac{\sqrt{E[S_T^{\alpha+1}]}}{a}. \quad (\text{A.5})$$

Este valor pode ser menor que ε para todo $\varepsilon > 0$ tomando:

$$a > \frac{\exp(-\alpha\kappa)}{\pi} \frac{\sqrt{E[S_T^{\alpha+1}]}}{\varepsilon}. \quad (\text{A.6})$$

Desenvolveremos agora uma versão alternativa de apreçamento de opções de compra européias. O método anterior multiplicou o valor da opção por uma função exponencial para obter uma função quadrado integrável cuja transformada de Fourier é uma função analítica da função característica do log-preço. Contudo, como observado em Carr & Madan (1999), este método torna a transformada de Fourier muito instável quando a maturidade da opção é pequena.

Considere κ o logaritmo do preço de exercício, S_0 o preço inicial do ativo e $z_T(\kappa) = e^{-rT} E[(e^{sT} - e^\kappa)^+] - (1 - e^{\kappa-rT})^+$ o valor no tempo da opção de compra européia: como ressaltado em Carr & Madan (1999), embora o preço de uma opção não seja quadrado integrável, o seu valor no tempo $z_T(\kappa)$ é. Para qualquer função de densidade unimodal, $z_T(\kappa)$ apresenta um máximo em $\kappa = \log(S_0)$ e declina nas duas direções, tanto quando κ tende para mais infinito ou para menos infinito. Desenvolveremos uma expressão analítica para a transformada de Fourier de $z_T(\kappa)$ em termos da função característica e do preço do ativo subjacente na maturidade.

Considere $\zeta_T(u)$ a transformada de Fourier de $z_T(\kappa)$, ou seja:

$$\zeta_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} z_T(\kappa) d\kappa. \quad (\text{A.7})$$

O valor no tempo $z_T(\kappa)$ é obtido ao invertermos esta relação:

$$z_T(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \zeta_T(u) du. \quad (\text{A.8})$$

Para melhorar a notação, consideraremos $S_0 = 1$ no cálculo de $\zeta_T(u)$ valor que pode ser corrigido posteriormente. Desenvolvendo a expressão de $z_T(\kappa)$ obtemos:

$$z_T(\kappa) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} [(e^\kappa - e^s) 1_{s < \kappa, \kappa < 0} - (e^s - e^\kappa) 1_{s > \kappa, \kappa > 0}] q_T(s) ds. \quad (\text{A.9})$$

A seguir, desenvolvemos a expressão para $\zeta_T(u)$ fazendo o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
\zeta_T(u) &= \int_{-\infty}^0 e^{iu\kappa - rT} d\kappa \int_{-\infty}^{\kappa} (e^{\kappa} - e^s) q_T(s) ds + \int_0^{\infty} e^{iu\kappa - rT} d\kappa \int_{\kappa}^{\infty} (e^s - e^{\kappa}) q_T(s) ds \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{-rT} q_T(s) ds \int_s^{\infty} (e^{\kappa(1+iu)} - e^{s+iu\kappa}) d\kappa + \int_0^{\infty} e^{-rT} q_T(s) ds \int_0^s (-e^{\kappa(1+iu)} + e^{s+iu\kappa}) d\kappa.
\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais acima obtemos:

$$\zeta_T(u) = e^{-rT} \left[\frac{1}{1+iu} - \frac{e^{rT}}{iu} - \frac{\phi_T(u-i)}{u^2 - iu} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Uma observação a ser feita, neste caso, é que o valor $z_T(\kappa)$ pode ficar bastante errático quando $\kappa = 0$ e $T \rightarrow 0$. Por isso, nós consideraremos a transformação $\sinh(\alpha\kappa)z_T(\kappa)$. Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned}
\gamma_T(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\kappa} \sinh(\alpha\kappa) z_T(\kappa) d\kappa \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\kappa} \frac{[e^{\alpha\kappa} - e^{-\alpha\kappa}]}{2} z_T(\kappa) d\kappa \\
&= \frac{\zeta_T(u - i\alpha) - \zeta_T(u + i\alpha)}{2}.
\end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Portanto, o valor no tempo $z_T(\kappa)$ é dado por:

$$z_T(\kappa) = \frac{1}{2\pi \sinh(\alpha\kappa)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\kappa} \gamma_T(u) du. \quad (\text{A.12})$$

Aplicação computacional da transformada rápida de Fourier:

Com base em A.2, desenvolveremos uma aproximação para a expressão:

$$C_T(\kappa) = \frac{\exp(-\alpha\kappa)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iu\kappa} \psi_T(u) du. \quad (\text{A.13})$$

Ela nos fornece o preço da opção de compra européia a partir de A.2 e A.3.

Como vimos, em A.2 e A.3, o preço da opção de compra européia é dado pela seguinte equação:

$$C_T(\kappa) = \frac{\exp(-\alpha\kappa)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iu\kappa} \psi_T(u) du, \quad (\text{A.14})$$

com ψ dado por:

$$\psi_T(u) = \frac{e^{-rT} \phi_T(u - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u}. \quad (\text{A.15})$$

Usando a regra do trapézio para a integral acima e tomando $u_j = (j - 1)/L, j \geq 1$, obtemos:

$$C_T(\kappa) \approx \frac{\exp(-\alpha\kappa)}{\pi L} \sum_{j=1}^N e^{-iu_j\kappa} \psi_T(u_j), \quad (\text{A.16})$$

para N e L suficientemente grandes.

Definindo $\kappa = -b + \lambda(m - 1), m \in \{1, 2, \dots, N\}$, com $b = N\lambda/2$, os autores em Carr & Madan (1999) desenvolvem, utilizando a regra de Simpson, a seguinte fórmula para a opção de compra européia:

$$C_T(\kappa) \approx \frac{\exp(-\alpha\kappa)}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(m-1)} \psi(u_j) \frac{\eta}{3} (3 + (-1)^j + \delta_{j-1}), \quad (\text{A.17})$$

sendo δ_n a medida de Dirac concentrada em $x=1$, que vale 1 se $j=1$ e vale 0 caso contrário.